ZESZYTY NAUKOWE
WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W OPOLU
SERIA B: STUDIA I MONOGRAFIE Nr 22

URSZULA WYBRANIEC-SKARDOWSKA i GRZEGORZ BRYLL

# Z BADAŃ NAD TEORIĄ ZDAŃ ODRZUCONYCH

OPOLE 1969

# OD REDAKCJI

Niniejsza monografia zawiera trzy prace dotyczące badań nad pojęciem zdania odrzuconego. Badania te, prowadzone pod kierunkiem Prof. dr Jerzego Słupeckiego przez dr Urszulę Wybraniec-Skardowską i dr Grzegorza Brylla, doprowadziły do zbudowania teorii zdań odrzuconych oraz umożliwiły formalizację pewnych zagadnień metodologii nauk empirycznych.

Redakcja uważa, że wyniki uzyskane przez autorów są tak silnie związane tematycznie, iż celowe jest opublikowanie ich w postaci zwartej.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W OPOLU

Nr 22 Seria B: MONOGRAFIE 1968

Urszula Wybraniec-Skardowska

# TEORIA ZDAŃ ODRZUCONYCH

## W s t ę p

Początkowo temat mojej pracy miał dotyczyć pewnych zagadnień z metodologii nauk empirycznych. Wstępny jednak rozdział dotyczący zdań odrzuconych tak się rozrósł, że wydaje się celowym wyodrębnienie go w postaci osobnej pracy. Z zaplanowanej początkowo tematyki opracowałam tylko rozdział pt. "Zdania empiryczne". Omawiając jednak sens intuicyjny twierdzeń i definicji podanych w pracy, często posługiwać się będę przykładami zaczerpniętymi z metodologii nauk empirycznych. Dalsze badania związane z pojęciem zdania odrzuconego kontynuowane są przez G. Brylla i wchodzą w zakres jego rozprawy doktorskiej.

Praca niniejsza wykonywana była pod kierunkiem Prof. dr Jerzego Słupeckiego. W tym miejscu składam Panu Profesorowi Jerzemu Słupeckiemu wyrazy prawdziwej wdzięczności za sformułowanie tematu pracy, za opiekę i życzliwą pomoc przy jej opracowywaniu oraz za wiele cennych pouczeń i sugestii, które miały istotny wpływ na kierunek i charakter moich badań.

Gorąco dziękuję również Panu Docentowi Ludwikowi Borkowskiemu, Panu Profesorowi Bronisławowi Knasterowi, Panu Docentowi Witoldowi A. Pogorzelskiemu i Panu Profesorowi Romanowi Suszko za istotne uwagi i wskazówki poczynione w dyskusjach nad moimi referatami.

Dziękuję także Panu Grzegorzowi Bryllowi za owocne dyskusje, które przyczyniły się do kilku zasadniczych ulepszeń. Za uprzejmą zgodą Pana Brylla zamieściłam w pracy kilka jego wyników.

Pojęcie zdania odrzuconego zostało wprowadzone przez Jana Łukasiewicza w związku z jego badaniami nad sylogistyką Arystotelesa (zob. [1] i [2])[1]. W celu "obalenia" fałszywych sylogizmów przyjmował Łukasiewicz, że niektóre z nich są "aksjomatycznie odrzucone". W celu obalenia dalszych sylogizmów Łukasiewicz wprowadził dwie "reguły odrzucenia". Pierwsza reguła pozwala odrzucić wyrażenie, gdy pewne jego podstawienie jest wyrażeniem poprzednio już odrzuconym. Druga reguła pozwala odrzucić poprzednik okresu warunkowego będącego tezą, gdy następnik jest wyrażeniem odrzuconym. Reguły te są w pewnym sensie odwrotne do reguł podstawienia i odrywania. J. Słupecki kontynuując badania nad sylogistyką Arystotelesa wykazał, że o ile nie doda się do przyjętych w tym systemie reguł odrzucania, pewnej nowej reguły, swoistej dla sylogistyki, to ilekolwiek zdań odrzuciłoby się aksjomatycznie, zawsze będzie istniało takie zdanie, którego ani nie można udowodnić na podstawie pozytywnych aksjomatów i reguł uznawania, ani też odrzucić na podstawie aksjomatów odrzuconych i reguł odrzucania. Jeśli zaś dołączymy nową regułę odrzucania sformułowaną przez Słupeckiego, wówczas system sylogistyki Arystotelesa staje się rozstrzygalny (zob. [4] i [1]).

Pojęciem zdania odrzuconego posługiwał się również Łukasiewicz budując czterowartościowy modalny rachunek zdań [3]. Zasadniczym celem badań Łukasiewicza, w których korzystał z pojęcia zdania odrzuconego, było twierdzenie, że zdaniami odrzuconymi są te i tylko te wyrażenia danego systemu, które nie są jego tezami.

---

[1] Spis cytowanych prac znajduje się na końcu artykułu.

Istotne uogólnienie pojęcia zdania odrzuconego podał J. Słupecki w pracy [5]. Wprowadzona w tej pracy funkcja $Cn'$ przyporządkowuje zbiorowi zdań $X$ klasę zdań odrzuconych na podstawie zdań zbioru $X$. Jeśli np. $X$ jest zbiorem zdań, z których każde jest zaprzeczeniem zdania stwierdzonego na podstawie pewnych doświadczeń, to do zbioru $Cn'X$ należą wszystkie hipotezy obalone przez te doświadczenia. Dokładna definicja funkcji $Cn'$ zostanie podana w §1 rozdziału I. Chwilowo zauważmy tylko, że w cytowanej pracy Słupecki posługuje się pojęciami z tzw. ogólnej teorii systemów dedukcyjnych Alfreda Tarskiego (zob. [6] i [7]), z którą związane też będą dalsze rozważania niniejszej pracy. Z tych względów omówimy pokrótce teorię Tarskiego.

Pojęciami pierwotnymi tej teorii są zbiór $S$ wszystkich zdań ustalonego języka i funkcja $Cn$ przyporządkowująca zbiorowi zdań $X$ klasę zdań wyprowadzalnych ze zdań zbioru $X$ (tzn. będących konsekwencjami zdań zbioru $X$).

Notując aksjomaty teorii Tarskiego skorzystamy z umowy, że zmienne $x$, $y$, $z$, ... przebiegają zbiór $S$, zmienne zaś $X$, $Y$, $Z$, .... rodzinę wszystkich podzbiorów tego zbioru:

$A1_T$. $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$,

$A2_T$. $X \subset CnX \subset S$,

$A3_T$. $X \subset Y \Longrightarrow CnX \subset CnY$,

$A4_T$. $CnCnX \subset CnX$,

$A5_T$. $x \in CnX \Longrightarrow \bigvee_{Y} (Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in CnY)$.

Podajemy te definicje i twierdzenia ogólnej teorii systemów, d których odwołamy się w dalszych częściach pracy[2].

$$D1_T.\quad X \in Syst \Longleftrightarrow CnX \subset X,$$

$$D2_T.\quad X \approx Y \Longleftrightarrow CnX = CnY,$$

$$D3_T.\quad X \in Aks \Longleftrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge X \approx Y),$$

$$D4_T.\quad X \in Nzl \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} x \notin Cn(X \setminus \{x\}),$$

$$D5_T.\quad X \in Nsp \Longleftrightarrow CnX \neq S,$$

$$D6_T.\quad X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \notin CnX} X \cup \{x\} \notin Nsp.$$

Zdefiniowane wyrażenia odpowiednio czytamy: X jest systeme zbiory X i Y są równoważne, zbiór X jest aksjomatyzowalny, X je zbiorem zdań niezależnych, zbiór X jest niesprzeczny, zbiór jest zupełny.

Podajemy kilka twierdzeń teorii Tarskiego.

$$T1_T.\quad CnX \cup CnY \subset Cn(X \cup Y),$$

$$T2_T.\quad X \in Nsp \wedge Y \subset X \Longrightarrow Y \in Nsp,$$

$$T3_T.\quad \bigwedge_{X \subset Y} (\overline{\overline{X}} < \aleph_0 \Longrightarrow X \in Nsp) \Longrightarrow Y \in Nsp,$$

$$T4_T.\quad X \in Zpł \wedge X \subset Y \Longrightarrow Y \in Zpł,$$

2) Dowody tych twierdzeń znajdzie Czytelnik np. w pracy [8]. Zauważ-my też, że zachowujemy umowę dotyczącą zmiennych.

T5$_T$. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{Y \in Nsp} (X \subset Y \Longrightarrow X \approx Y)$,

T6$_T$. $X \cup Y \in Nzl \wedge X \approx Y \Longrightarrow X = Y$,

T7$_T$. $X \in Nzl \wedge Y \subset X \Longrightarrow Y \in Nzl$,

T8$_T$. $X \in Nzl \Longleftrightarrow \bigwedge_{Y,Z} (Y \cup Z \subset X \wedge Y \approx Z \Longrightarrow Y = Z)$,

T9$_T$. $X \in Nzl \wedge Y \subset X \Longrightarrow (Y \in Aks \Longleftrightarrow \overline{\overline{Y}} < \aleph_0)$.

Skorzystamy również z twierdzenia Lindenbauma, które mówi, że każdy niesprzeczny zbiór zdań posiada niesprzeczny i zupełny nadzbiór będący systemem.

Oprócz pojęć i twierdzeń ogólnej teorii systemów korzystać będziemy dalej z pojęć i twierdzeń teorii bogatszej zbudowanej również przez Tarskiego [7]. Teorię tę nazywać będziemy teorią T. Jej terminami pierwotnymi obok terminów pierwotnych ogólnej teorii systemów są symbole "n" i "c". Wyrażenie "nx" oznacza negację zdania x, wyrażenie "cxy" oznacza implikację o poprzedniku x i następniku y. Aksjomaty teorii T otrzymujemy dołączając do aksjomatów ogólnej teorii systemów następujące wyrażenia:

A6$_T$. $cxy \in CnX \Longleftrightarrow y \in Cn\,(X \cup \{x\})$,

A7$_T$. $Cn\{x, nx\} = S$,

A8$_T$. $Cn\{x\} \cap Cn\{nx\} = Cn\Phi$,

A9$_T$. $x, y \in S \Longrightarrow nx, cxy \in S$,

A10$_T$. $nx = ny \Longrightarrow x = y$.

Ostatni aksjomat nie występuje w teorii Tarskiego, potrzebny będzie jednak w pewnym punkcie dalszych rozważań.

Skorzystamy dalej z następujących twierdzeń teorii $T^{3)}$:

$$\text{T10}_T. \quad X \in Nzl \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} (X \setminus \{x\} \cup \{nx\} \in Nsp),$$

$$\text{T11}_T. \quad X \in Nsp \Longleftrightarrow \bigvee_{x} (x,\ nx \in CnX),$$

$$\text{T12}_T. \quad X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in CnX \vee nx \in CnX).$$

Twierdzenia te mogą zastąpić definicje zbiorów Nzl, Nsp i Zpł.

$$\text{T13}_T. \quad x,\ cxy \in CnX \Longrightarrow y \in CnX.$$

W myśl tego twierdzenia, zbiór CnX jest domknięty ze względu na regułę odrywania.

$$\text{T14}_T. \quad cxy \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn\{y\} \subset Cn\{x\},$$

$$\text{T14a}_T. \quad cxy,\ cyx \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn\{x\} = Cn\{y\}.$$

Skorzystamy też wielokrotnie z następującej uwagi:

Uwaga 1. Jeśli $\alpha$ jest wyrażeniem, w którym oprócz zmiennych występują co najwyżej symbole "c" i "n", to wyrażenie

$$\alpha \in Cn\emptyset$$

3) Por. odnośnik 2 na s. 8.

jest twierdzeniem teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha$ jest podstawieniem tezy klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań[4].

W rozdziale I pracy zostaną podane dalsze definicje teorii T, wśród nich definicja zasadniczego dla tej pracy pojęcia funkcji $Cn'$. Omówimy tu też własności zdefiniowanych pojęć. Nie wprowadzimy natomiast nowych aksjomatów. Tak więc twierdzenia rozdziału I mieścić się będą w teorii T, wzbogaconej jednak o istotnie nowe intuicje.

W rozdziale II zbudujemy aksjomatyczną teorię $T_1$, którą nazywać będziemy teorią konsekwencji jednostkowej.

W rozdziale III zostanie zbudowana aksjomatyczna teoria $T'$, której pojęciami pierwotnymi są wspólne z teorią T pojęcia S, c i n oraz funkcja $Cn'$. Wykażemy też, że teoria ta jest równoważna teorii T.

W rozdziale IV, ostatnim rozdziale tej pracy, omówiona będzie rola zdań empirycznych w rozumowaniach nauk doświadczalnych. Celem tego rozdziału jest wskazanie w jaki sposób pojęcia i twierdzenia trzech pierwszych rozdziałów pracy mogą być zastosowane w metodologii nauk empirycznych.

---

4) Uwaga ta jest oparta między innymi na pewnym wyniku J. Słupeckiego (zob. [10]).

# R o z d z i a ł  I

## TEORIA T WZBOGACONA O NOWE DEFINICJE

### §1. Zasadnicze własności funkcji $Cn'$.

Definicja funkcji $Cn'$ ma następującą postać:

$$\text{D1.} \quad y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\}.$$

Do zbioru $Cn'X$ należą więc te i tylko te zdania zbioru $S$, z których wyprowadzalne jest co najmniej jedno zdanie zbioru $X$. Zbiór $Cn'X$ nazywać będziemy zbiorem zdań odrzuconych na podstawie zdań zbioru $X$ lub krócej: na podstawie zbioru $X$. Podstawową własnością zdefiniowanego pojęcia jest to, że wszystkie elementy zbioru $Cn'X$ są zdaniami fałszywymi, o ile tylko fałszywymi są wszystkie zdania zbioru $X$. W celu uzasadnienia tego oznaczmy przez $F$ zbiór tych zdań należących do $S$, które są fałszywe. Przyjmijmy też, że prawdziwe jest wyrażenie

$$X \in S \setminus F \Longrightarrow CnX \subset S \setminus F^{5)}. \qquad (1)$$

---

5) Nie definiujemy zbioru $F$, jak również nie dowodzimy wzoru (1). Zbiór $F$ należy więc zaliczyć do pojęć pierwotnych systemu, którym się zajmujemy, wzór zaś (1) do jego aksjomatów. Nie zrobimy jednak tego, gdyż w dalszych częściach pracy nie będziemy się ani posługiwać pojęciem zbioru $F$, ani odwoływać do wzoru (1).

Przyjmujemy tym samym, że Cn jest "konsekwencją niezawodną". Wykażemy, że

$$X \subset F \Longrightarrow Cn'X \subset F \tag{2}$$

a więc, że zbiór $Cn'X$ posiada wspomnianą własność.

Załóżmy istnienie zdania $y$, spełniającego warunki:

$$y \in Cn'X\ ,\ y \notin F. \tag{3}$$

W myśl więc D1 istnieje takie zdanie $x_1$, że

$$x_1 \in X \quad i \quad x_1 \in Cn\{y\}. \tag{4}$$

Z (1) i drugiego ze wzorów (3) wynika, że $Cn\{y\} \in S \setminus F$. Stąd i z (4) otrzymujemy, że $x_1 \notin F$. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z pierwszym ze wzorów (4) i założeniem dowodzonego wzoru.

Następujące definicje są analogiczne do definicji $D1_T - D4_T$ ogólnej teorii systemów:

D2. $X \in Syst' \Longleftrightarrow Cn'X \subset X,$

D3. $X \approx' Y \Longleftrightarrow Cn'X = Cn'Y$

D4. $X \in Aks' \Longleftrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge X \approx' Y),$

D5. $X \in Nzl' \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} x \notin Cn'(X \setminus \{x\}).$

Pierwsze ze zdefiniowanych wyrażeń czytamy: X jest systemem ze względu na odrzucanie. W analogiczny sposób czytamy pozostałe wyrażenia.

Następujące twierdzenia są natychmiastowymi wnioskami z definicji D1 i mogą ją zastąpić:

$$\text{T1a.}\quad y \in Cn'X \Longleftrightarrow X \cap Cn\{y\} \neq \Phi,$$

$$\text{b.}\quad y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} cyx \in Cn\Phi.$$

W dowodzie T1b należy odwołać się też do $A6_T$.

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem reguły odwrotnej do reguły odrywania:

$$\text{T2.}\quad cxy \in Cn\Phi \wedge y \in Cn'X \Longrightarrow x \in Cn'X.$$

Natomiast nie ma miejsca reguła odwrotna do reguły podstawiania, gdyż teoria Tarskiego nie rozważa systemów, w których reguła ta obowiązuje. Dla wykazania prawdziwości T2 załóżmy, że

$$cxy \in Cn\Phi, \tag{1}$$

$$y \in Cn'X. \tag{2}$$

Z (2) i T1b wynika istnienie takiego $x_1 \in X$, że

$$cyx_1 \in Cn\Phi. \tag{3}$$

Z Uwagi 1 (zob. Wstęp) wynika, że

$$ccxyccyx_1cxx_1 \in Cn\Phi. \tag{4}$$

Ze wzorów (4), (1), (3) oraz $T13_T$ otrzymujemy wzór

$$cxx_1 \in Cn\Phi. \tag{5}$$

Z (5), T1b i uwagi, że $x_1 \in X$ wynika teza twierdzenia.

W jaki sposób korzystamy z twierdzenia T2 pokażemy na przykładzie dowodu twierdzenia:

T2a. $cxy \in Cn'X \Longrightarrow nx,\ y \in Cn'X.$

D o w ó d. Z Uwagi 1 wynika, że $cnxcxy,\ cycxy \in Cn\,\Phi$. Stąd, założenia twierdzenia i T2 wynika, że $nx,\ y \in Cn'X$.

Dowód następujących czterech twierdzeń podany jest w pracy [5]. Ze względu jednak na zasadnicze znaczenie tych twierdzeń dla dalszych rozważań, jak też ze względu na to, że praca [5] jest trudno dostępna powtórzymy ich dowody w Dodatku. Podobnie dowody większości twierdzeń zamieszczać będziemy w Dodatku, zamiast w tekście. Numery tych twierdzeń zaopatrzymy gwiazdką.

T3*a. $X \subset Cn'X \subset S,$

b. $X \subset Y \Longrightarrow Cn'X \subset Cn'Y,$

c. $Cn'Cn'X \subset Cn'X,$

d. $x \in Cn'X \Longrightarrow \bigvee_{Y} (Y \subset X \wedge \bar{\bar{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn'Y).$

Wstawiając więc w aksjomatach $A2_T$ - $A5_T$ teorii Tarskiego w miejsce symbolu Cn wszędzie symbol Cn′ otrzymamy zdania będące tezami tej teorii wzbogaconej o definicję D1. Stąd i z uwagi, że definiensy D2 - D5 powstają odpowiednio z definiensów $D1_T$ - $D4_T$ przez zastąpienie symbolu Cn symbolem Cn′, wynika następująca zasadnicza własność tej części teorii T, którą zajmujemy się w tym paragrafie.

T w i e r d z e n i e I. Jeśli $\alpha$ jest dowolnym twierdzeniem ogólnej teorii systemów, w którym oprócz symbolu S i zmiennych występować mogą tylko symbole

$$\mathrm{Cn},\ \mathrm{Syst},\ \approx,\ \mathrm{Aks},\ \mathrm{Nzl}, \tag{1}$$

to wyrażenie $\alpha'$, które powstaje z $\alpha$ przez zastąpienie symboli (1) odpowiednio symbolami

$$\mathrm{Cn}',\ \mathrm{Syst}',\ \approx',\ \mathrm{Aks}',\ \mathrm{Nzl}', \tag{1'}$$

jest twierdzeniem teorii T.
Wyrażenie $\alpha'$ nazywać będziemy primowanym odpowiednikiem wyrażenia $\alpha$. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia I nie jest prawdziwe, gdyż np. wyrażenie

T4. $\mathrm{Cn}'(X \cup Y) = \mathrm{Cn}'X \cup \mathrm{Cn}'Y$

jest jak to zostało wykazane w artykule [5] prawdziwe, natomiast wyrażenie

$$\mathrm{Cn}(X \cup Y) = \mathrm{Cn}\,X \cup \mathrm{Cn}\,Y$$

jest fałszywe.

W myśl T4 funkcja Cn′ jest funkcją addytywną. Gdy więc pewna hipoteza jest obalona na podstawie sumy dwóch zbiorów zdań empirycznych, to jest obalona na podstawie zdań jednego z tych zbiorów.

Bezpośrednim wnioskiem z T4 jest

T4a. $\mathrm{Cn}'\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathrm{Cn}'\{x_1\} \cup \mathrm{Cn}'\{x_2\} \cup \ldots \cup \mathrm{Cn}'\{x_n\}$.

Podamy teraz dwa przykłady primowanych odpowiedników twierdzeń ogólnej teorii Tarskiego.

$$\text{T5.} \quad X \cup Y \in Nzl' \wedge X \approx' Y \Longrightarrow X = Y.$$

Jeśli każde zdanie odrzucone na podstawie zdań jednego ze zbiorów $X$ i $Y$ jest odrzucone na podstawie zdań zbioru drugiego i żadne zdanie zbioru $X \cup Y$ nie jest odrzucone na podstawie pozostałych zdań tego zbioru, to w myśl T5 $X = Y$.

$$\text{T6.} \quad X \in Nzl' \Longrightarrow (X \in Aks' \Longleftrightarrow \overline{\overline{X}} < \aleph_0).$$

Jeśli żadne zdanie zbioru $X$ nie może być odrzucone na podstawie zdań pozostałych, to istnieje skończony zbiór zdań, na podstawie których odrzucone jest każde zdanie zbioru $X$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X$ jest skończony.

Podamy teraz kilka podstawowych twierdzeń charakteryzujących funkcję $Cn'$ i pojęcia przy pomocy tej funkcji zdefiniowane. Twierdzenia te jednak nie będą primowanymi odpowiednikami twierdzeń teorii Tarskiego.

$$\text{T7.} \quad y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow x \in Cn\{y\}.$$

Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z D1.

$$\text{T8.} \quad Cn'\emptyset = \emptyset.$$

Twierdzenie T8 wynika łatwo z T1a i mówi, że żadne zdanie nie może być odrzucone na podstawie zbioru pustego.

$$\text{T9.} \quad y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn'\{x\}.$$

Twierdzenie to wynika z D1 i T7 i mówi, że jakieś zdanie jest odrzucone na podstawie zdań pewnego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy jest odrzucone na podstawie tylko jednego zdania tego zbioru. Własność ta nie jest słuszna dla funkcji Cn.

$$\text{T10.} \quad Cn'X = S \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} x \in Cn\,\emptyset.$$

W myśl tego twierdzenia na podstawie zdań pewnego zbioru X można odrzucić dowolne zdanie wtedy i tylko wtedy, gdy chociaż jedno zdanie zbioru X jest konsekwencją zbioru pustego albo co na to samo wychodzi, gdy chociaż jedno zdanie będące konsekwencją zbioru pustegó jest odrzucone na podstawie zdań zbioru X.

D o w ó d. Z Uwagi 1 (zob. Wstęp) wynika, że elementem zbioru $Cn\,\emptyset$ jest zdanie cxcyx. Jeśli założymy, że elementem $Cn\,\emptyset$ jest też zdanie $x \in X$, to na podstawie $T13_T$ elementem tego zbioru jest zdanie cyx, co w myśl T1b daje, że dowolne zdanie $y \in Cn'X$, a więc $Cn'X = S$. Załóżmy teraz, że $Cn'X = S$. Na podstawie Uwagi 1 $cxx \in Cn\,\emptyset$, a więc w myśl $A2_T$ $cxx \in Cn'X$. Stąd i z T1b wynika istnienie zdania $x_1 \in X$, że $ccxxx_1 \in Cn\,\emptyset$. Do zbioru $Cn\,\emptyset$ należą więc zdania cxx oraz $ccxxx_1$, a zatem zgodnie z $T13_T$ należy też zdanie $x_1 \in X$. Dowód T10 jest więc zakończony.

Łatwymi wnioskami z T10 i Uwagi 1 są twierdzenia T10a i T10b.

$$\text{T10a.} \quad Cn'\{x\} = S \Longleftrightarrow x \in Cn\,\emptyset,$$

$$\text{T10b.} \quad Cn'Cn\,\emptyset = S,$$

$$T11^{*}. \quad cxy \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn'\{x\} \subset Cn'\{y\}$$ [6]

W myśl T11 zdanie y wynika ze zdania x wtedy i tylko wtedy, gdy na podstawie zdania y można odrzucić co najmniej te wszyst- kie zdania, które odrzucić możemy na podstawie zdania x, gdy w myśl $T14_T$ zdanie y wynika ze zdanie x wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie wyprowadzalne na podstawie zdania y jest wypro- wadzalne na podstawie zdania x.

Natychmiastowym wnioskiem z T11 jest twierdzenie T11a.

$$T11a. \quad cxy,\ cyx \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn'\{x\} = Cn'\{x\},$$

$$T12^{*}. \quad X \in Syst' \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \notin X} x \notin Cn\{y\}.$$

Zbiór X jest więc zbiorem domkniętym ze względu na odrzucanie wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie tego zbioru może wynikać tyl- ko ze zdania należącego do tego zbioru.

$$T13^{*}. \quad X \in Nzl \Longrightarrow X \in Nzl'.$$

Jeśli żadne zdanie zbioru X nie wynika z pozostałych zdań tego zbioru, to żadne zdanie zbioru X nie może być na podstawie pozo- stałych zdań tego zbioru odrzucone. Zauważmy, że implikacja odwrot- na nie jest prawdziwa.

$$T14^{*}. \quad X \cup Y \in Nzl \Longrightarrow (X \approx Y \Longleftrightarrow X \approx' Y).$$

Twierdzenie to ustala pewien związek pomiędzy równoważnością dwóch zbiorów ze względu na wyprowadzalność i odrzucanie. Inny związek

---

6) Przypominamy, że gwiazdka umieszczona obok numeru twierdzenia wskazuje, że dowód twierdzenia podany jest w Dodatku.

pomiędzy tymi pojęciami wynikający natychmiast z $T14a_T$, T11a oraz $D2_T$ i D3 ustala

$$T15. \quad \{x\} \approx \{y\} \Longleftrightarrow \{x\} \approx' \{y\}.$$

## §2. Zbiory niesprzeczne i zupełne ze względu na odrzucanie

Definiując zbiory niesprzeczne i zupełne ze względu na odrzucanie można wzorować się bądź na definicjach $D5_T$ i $D6_T$ ogólnej teorii systemów Tarskiego, bądź też na twierdzeniach $T11_T$ i $T12_T$ teorii T. Wybieramy drugą z tych możliwości i dołączamy do teorii T następujące dwie definicje:

$$D6. \quad X \in Nsp' \Longleftrightarrow \sim \bigvee_x (x,\ nx \in Cn'X),$$

$$D7. \quad X \in Zpł' \Longleftrightarrow \bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X).$$

Kierujemy się tu następującymi intuicjami: jeśli na podstawie zdań zbioru X daje się obalić chociaż jedna para sprzecznych hipotez, to zbioru X nie zaliczylibyśmy do niesprzecznych ze względu na odrzucanie zbiorów zdań. Gdybyśmy natomiast przyjęli primowany odpowiednik $D5_T$, to zbiór X mógłby być, jak zostanie to wykazane później, zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie. Na przykład jeśli na podstawie zdań zbioru X sprzecznych ze zdaniami uzasadnionymi na drodze obserwacji meteorologicznych obalona jest zarówno hipoteza, że w najbliższych dniach będzie pogoda, jak też hipoteza, że pogody nie będzie, to zbiór X w myśl przyjętej definicji nie jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie. Gdybyśmy zaś przyjęli jako definicję Nsp' primowany odpowiednik $D5_T$, dla niezaliczenia zbioru X do zbioru Nsp' koniecznym byłoby odrzucenie na podstawie zbioru $X$ wszystkich par hipotez sprzecznych, co wydaje się żądaniem zbyt mocnym. Zauważmy też, że przyjęta definicja zachowuje następującą własność, którą na pewno posiada primowany odpowiednik $D5_T$: jeśli $Y$ jest zbiorem zdań uzasadnionych doświadczalnie i których negacje tworzą zbiór $X$, to z nienależenia zbioru $X$ do $Nsp'$ wynika, że wśród zdań zbioru $Y$ są zdania fałszywe. Gdyby bowiem wszystkie zdania zbioru $Y$ były prawdziwe, to wszystkie zdania zbioru $X$ byłyby fałszywe i na ich podstawie nie mogłyby być odrzucone dwie hipotezy sprzeczne.

Związek pomiędzy przyjętą definicją $Nsp'$ i primowanym odpowiednikiem $D5_T$ charakteryzuje twierdzenie

T16. $X \in Nsp' \Longrightarrow Cn' X \neq S,$

jak też to, że twierdzenie T16 nie daje się odwrócić, co wykażemy później.

Przeprowadzimy dowód T16. W myśl przyjętej definicji zbioru niesprzecznego ze względu na odrzucanie i z założenia twierdzenia otrzymujemy

$$\sim \bigvee_{x} (x,\ nx \in Cn'X). \tag{1}$$

Załóżmy niewprost, że

$$Cn'X = S. \tag{2}$$

Z $A1_T$ i $A9_T$ wynika, że do zbioru $S$ należy dowolna para zdań sprzecznych. Stąd i wobec (2) dowolna taka para należy do zbioru $Cn'X$, co przeczy wzorowi (1).

Przyjmując definicję D7 kierujemy się intuicją, że zbiór X zdań empirycznych jest zupełny ze względu na odrzucanie, gdy z każdej pary hipotez sprzecznych co najmniej jedna jest obalona na pod stawie zdań zbioru $X$. Gdybyśmy natomiast przyjęli jako definicję primowany odpowiednik definicji $D6_T$, to zupełnym ze względu na odrzucanie mógłby być zbiór $X$, nie spełniający tego warunku, gdyż jak wykażemy później nie zachodzi twierdzenie odwrotne do

$$\text{T17.} \quad X \in Zp\grave{z}' \Longrightarrow \bigwedge_{x \notin Cn'X} X \cup \{x\} \notin Nsp'.$$

Przeprowadzimy dowód T17. Z założenia twierdzenia i przyjętej definicji zbioru zupełnego ze względu na odrzucanie wynika

$$\bigwedge_{x} (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X). \tag{1}$$

Załóżmy dodatkowo, że dla dowolnego lecz ustalonego zdania $x$

$$x \notin Cn'X. \tag{2}$$

Stąd i wobec (1) $nx \in Cn'X$. W myśl więc T3a, b $x, nx \in Cn'(X \cup \{x\})$ co dowodzi, że zbiór $X \cup \{x\}$ nie jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie.

Wykażemy podając pewną interpretację, że wyrażenia odwrotne do T16 i T17 nie wynikają z aksjomatów i definicji teorii T.

Niech $S$ będzie zbiorem wszystkich ciągów pięciowyrazowych, których pierwsze cztery wyrazy są zerami lub jedynkami, zaś wyraz piąty jest dowolną liczbą naturalną. Widocznym jest, że zbiór $S$ jest mocy $\aleph_0$. Elementy zbioru $S$ oznaczać będziemy małymi literami łacińskimi ze wskaźnikami u dołu. Kolejne wyrazy ciągu $a_j$ oznaczamy

$$a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}, a_{j5}.$$

Wprowadźmy dwie pomocnicze funkcje $\mathbf{n}$ i $\mathbf{c}$ wyznaczone przez następujące równości:

$$\mathbf{n}0 = 1, \quad \mathbf{n}1 = 0$$

oraz

$$\mathbf{c}00 = 1, \mathbf{c}01 = 1, \mathbf{c}10 = 0, \quad \mathbf{c}11 = 1.$$

Negację interpretujemy w następujący sposób:

(I) $b_j = N(a_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$1^\circ$. dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 4$ $b_{ji} = \mathbf{n}a_{ki}$,

$2^\circ$. $b_{j5} = a_{k5}$.

Implikacji przyporządkowujemy funkcję

(II) $d_j = C(a_k, b_l)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$1^\circ$. dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 4$ $d_{ji} = \mathbf{c}a_{ki}b_{li}$,

$2^\circ$. $d_{j5} = b_{l5}$.

Niech $X$ jest dowolnym podzbiorem zbioru $S$. Funkcję $Cn$ interpretujemy jako funkcję $W$ określoną w następujący sposób:

(III) $x_j \in W\,X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór skończony $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ zbioru $X$ taki, że

$1^\circ$. dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 4$

$$Cy_{1i}Cy_{2i}C\ldots Cy_{ni}x_{ji} = 1,$$

$2^\circ$. $x_{j5}$ jest dowolną liczbą naturalną[7].

Podane definicje zilustrujemy przykładami.

$$N(1, 0, 1, 1, k) = (0, 1, 0, 0, k);$$

$$C((1, 0, 1, 1, k), (0, 1, 1, 0, 1)) = (0, 1, 1, 0, 1);$$

$$(1, 0, 0, 0, 8) \in W\{(0, 1, 0, 0, 5), (1, 0, 1, 0, 7)\};$$

gdyż

$$C0C11 = 1, C1C00 = 1, C0C10 = 1, C0C00 = 1.$$

Z definicji II i III wynika wniosek

(IV) $C(a_k, b_l) \in W\emptyset \Longleftrightarrow \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 4} a_{ki} \leqslant b_{li}.$

Wykażemy przykładowo, że aksjomaty $A4_T$ i $A8_T$ spełniają podaną interpretację.

(V) $W\,W\,X \subset W\,X.$

D o w ó d. Załóżmy niewprost, że dla pewnego $x_k$ spełnione są warunki:

$$x_k \in W\,W\,X, \tag{1}$$

[7] Nie wykluczamy przypadku, gdy zbiór Y jest zbiorem pustym. W przypadku tym wyrażenie $1^\circ$ redukuje się do wyrażenia $x_{ji} = 1$.

$$x_k \notin W\, X. \tag{2}$$

Z założenia (2) wynika, że dla każdego skończonego zbioru $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ będącego podzbiorem zbioru $X$ istnieje takie $1 \leqslant i \leqslant 4$, że $c\, y_{1i}\, c\, y_{2i}\, c \ldots c\, y_{ni}\, x_{ki} = 0$. Stąd wynika łatwo, że dla dowolnego $v_j \in X$ i pewnego $1 \leqslant i_1 \leqslant 4$ jest

$$x_{ki_1} = 0 \quad \text{i} \quad v_{ji_1} = 1. \tag{3}$$

Z założenia (1) wynika istnienie takiego skończonego zbioru $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m'\}$ będącego podzbiorem $W\, X$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 4$ jest $c\, z_{1i}\, c\, z_{2i}\, c \ldots c\, z_{mi}\, x_{ki} = 1$. Stąd i z (3) wynika, że

$$\text{Istnieje takie} \quad 1 \leqslant l_1 \leqslant m, \quad \text{że} \quad z_{l_1 i_1} = 0. \tag{4}$$

Ponieważ $z_{l_1} \in Z$, więc $z_{l_1} \in W\, X$.

Ze wzoru (III) wynika zatem istnienie takiego skończonego zbioru $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ będącego podzbiorem zbioru $X$, że

$$c\, u_{1i_1}\, c\, u_{2i_1}\, c \ldots c\, u_{si_1}\, z_{l_1 i_1} = 1.$$

Stąd i z (4) wynika, że

$$\text{Istnieje takie} \quad 1 \leqslant t \leqslant s, \quad \text{że} \quad u_{ti_1} = 0. \tag{5}$$

Wzory (3) i (5) są sprzeczne, gdyż $u_t$ jest elementem zbioru $U \subset X$.

(VI) $\quad W\{a_k\} \cap W\{N\,(a_k)\} = W\,\Phi$

D o w ó d. Ze wzorów (I), (III) (zob. odnośnik 7) wynika, że następujące cztery wyrażenia są równoważne:

$$x_j \in W\{a_k\} \cap W\{N(a_k)\},$$

$$\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 4} (ca_{ki}x_{ji} = 1 \wedge cna_{ki}x_{ji} = 1),$$

$$\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 4} x_{ji} = 1,$$

$$x_j \in W\Phi.$$

Z równoważności pierwszego i czwartego spośród tych wyrażeń wynika (VI).

Łatwo sprawdzić, że w podanej interpretacji spełnione są również wszystkie pozostałe aksjomaty teorii T.

Podamy teraz interpretację funkcji $Cn'$, przyporządkowując jej funkcję $W'$, którą na podstawie T1b możemy określić w następujący sposób:

(VII) $$x_k \in W'X \Longleftrightarrow \bigvee_{y_l \in X} C(x_k, y_l) \in W\Phi.$$

Stąd i z (IV) wynika

(VIII) $$x_j \in W'X \Longleftrightarrow \bigvee_{y_l \in X} \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 4} x_{ki} \leqslant y_{li}.$$

Wykażemy, że dla zbioru $X = \{(1, 1, 0, 0, 5), (0, 0, 1, 1, 5)\}$ wyrażenia

$$(\alpha) \quad W'X / S \text{ i } \bigwedge_{x_k \notin W'X} \bigvee_{y_l} y_l, N(y_l) \in W'(X \cup \{x_k\})$$

są prawdziwe, fałszywe natomiast są wyrażenia:

$$(\beta) \quad \sim \bigvee_{x_k} x_k, N(x_k) \in W'X \text{ i } \bigwedge_{x_k} (x_k \in W'X \vee N'(x_k) \in W'X).$$

Zauważmy, że wyrażenia

$$X \subset W'X \text{ i } X \subset Y \Longrightarrow W'X \subset W'Y$$

są prawdziwe. Zauważmy dalej, że

$$N(1, 1, 0, 0, 5) = (0, 0, 1, 1, 5).$$

Z uwag tych wynika, że pierwsze z wyrażeń $(\beta)$ jest fałszywe, z wyrażenie $\bigvee_{y_l} y_l, N(y_l) \in W'(X \cup \{x_k\})$ jest prawdziwe dla dowoln go ciągu $x_k$, a tym samym dla ciągu $x_k \notin W'X$. Prawdziwe jest wi drugie spośród wyrażeń $(\alpha)$. Ze wzoru (VIII) wynika, że do zbio $W'X$ nie należy ciąg (0, 1, 0, 1, 5), ani też ciąg (1, 0, 1, 0, będący jego negacją. Wynika stąd prawdziwość pierwszego spośród wyrażeń $(\alpha)$ i fałszywość drugiego spośród wyrażeń $(\beta)$.

Stąd, że pierwsze z wyrażeń $(\alpha)$ jest prawdziwe, a pierwsz wyrażeń $(\beta)$ fałszywe wynika, że fałszywe jest twierdzenie odw ne do T16. Fałszywa jest również implikacja odwrotna do T17, gdyż prawdziwe jest drugie z wyrażeń $(\alpha)$ i równocześnie fałs we drugie spośród wyrażeń $(\beta)$.

To, że wyrażenie T16 nie daje się odwrócić jest jak wspomnieliśmy argumentem przemawiającym za przyjęciem D6 za definicję Nsp'. Jeśli bowiem X jest zbiorem pewnych zdań empirycznych i ich negacji, a więc zbiorem zdań nie będących tezami klasycznego rachunku zdań (zob. $T14_E$, rozdział IV), to w myśl T10 $Cn'X \neq S$. Gdybyśmy za definicję Nsp' przyjęli primowany odpowiednik $D5_T$ wówczas zbiór X należałoby uznać za niesprzeczny ze względu na odrzucanie, choć elementami tego zbioru są zdania sprzeczne.

Podamy przykładowo trzy twierdzenia, w których wystąpią symbole Nsp' i Zpł'. Twierdzenia te powstają z twierdzeń ogólnej teorii systemów Tarskiego przez zastąpienie terminów nieprimowanych terminami primowanymi. O prawdziwości tych twierdzeń nie możemy jednak wnioskować na podstawie twierdzenia T1, gdyż twierdzenie to nie obejmowało terminów Nsp' i Zpł'.

T18. $X \in Nsp' \wedge Y \subset X \Longrightarrow Y \in Nsp'$.

Każdy podzbiór zbioru niesprzecznego ze względu na odrzucanie jest więc w myśl T18 zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie.

T19. $\bigwedge_{X \subset Y} (\bar{\bar{X}} < \aleph_0 \Longrightarrow X \in Nsp') \Longrightarrow Y \in Nsp'$.

Twierdzenie T19 mówi, że zbiór jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie, jeśli każdy jego skończony podzbiór jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie.

T20. $X \in Zpł' \wedge X \subset Y \Longrightarrow Y \in Zpł'$.

W myśl tego twierdzenia każdy nadzbiór zbioru zupełnego ze względu na odrzucanie jest zbiorem zupełnym ze względu na odrzucanie. Łatwe dowody T18 – T20 pomijamy.

Interesujące jest, że wszystkie ważniejsze twierdzenia ogólnej teorii systemów Tarskiego dotyczące zbiorów niesprzecznych i zupełnych mają swoje odpowiedniki w teorii T wzbogaconej o definicje D7 i D8.

## § 3. Zdania sprzeczne

Definicja zdania sprzecznego z danym zdaniem x ma następującą postać:

$$\text{D8.}\quad y = \neg x \Longrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny.$$

Poprawność tej definicji gwarantuje $A10_T$.

Sens intuicyjny wprowadzonego pojęcia wyjaśniają następujące twierdzenia:

$$\text{T21.}\quad \neg nx = x,$$

$$\text{T22.}\quad \bigwedge_{z} (x \neq nz) \Longrightarrow \neg x = nx.$$

Są one prostymi wnioskami z przyjętej definicji. Zgodnie z tymi twierdzeniami zdanie sprzeczne np. ze zdaniem "pada deszcz" jest identyczne ze zdaniem "nie pada deszcz", zdanie zaś sprzeczne ze zdaniem "nie pada deszcz" jest identyczne ze zdaniem "pada deszcz".

Podamy teraz kilka dalszych własności zdań sprzecznych.

$$\text{T23}^{*}.\quad cnx\neg x,\ c\neg xnx \in Cn\emptyset.$$

Nieco dłuższy dowód tego twierdzenia podajemy, tak jak dowody większości twierdzeń, w Dodatku.

Stąd, że reguła ekstensjonalności jest regułą wtórną klasycznego rachunku zdań i z Uwagi 1 (zob. Wstęp) wynika, że jeśli następujące wyrażenie jest twierdzeniem teorii T

$$\varphi(x),\ cxy,\ cyx \in Cn\Phi,$$

to $\varphi(y) \in Cn\Phi$, przy czym $\varphi(y)$ oznacza zdanie, które powstaje z $\varphi(x)$ przez zastąpienie na wszystkich lub tylko niektórych miejscach zdania x przez zdanie y.

Stąd i z T23 wynika

Uwaga 2. Jeśli zdanie $\alpha$ powstaje ze zdania $\beta$, w którym oprócz zmiennych występować mogą co najwyżej symbole "c" i "n", przez zastąpienie symbolu "n" symbolem "¬", to zdanie "$\alpha \in Cn\Phi$" jest twierdzeniem teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy twierdzeniem tej teorii jest zdanie "$\beta \in Cn\Phi$".

T24a. $Cn\{\neg x\} = Cn\{nx\}$.

b. $Cn'\{\neg x\} = Cn'\{nx\}$.

T24a jest natychmiastowym wnioskiem z T23 i $T14a_T$. T24b natomiast z T23 i T11a. Twierdzenia te mówią, że te i tylko te zdania są wyprowadzone (lub odrzucone) na podstawie zdania sprzecznego ze zdaniem x, które są wyprowadzalne (lub odrzucone), na podstawie negacji zdania x.

T25* a. $\neg x \in CnX \Longleftrightarrow nx \in CnX$.

b. $\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow nx \in Cn'X$.

W myśl T25a, b zdanie sprzeczne z dowolnym zdaniem x może być wyprowadzone (lub odrzucone) na podstawie dowolnego zbioru zdań X wtedy i tylko wtedy, gdy na podstawie tego zbioru może być wyprowadzona (lub odrzucona) negacja zdania x.

T26*a. $\neg\neg x \in CnX \Longleftrightarrow x \in CnX$,

b. $\neg\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow x \in Cn'X$.

T27a. $y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow \neg y \in Cn\{\neg x\}$,

b. $y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow \neg x \in Cn'\{\neg y\}$,

c. $y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow nx \in Cn'\{ny\}$.

Podajemy dowód twierdzenia T27a. Z Uwagi 1 wynika prawdziwość wzoru

$$ccyxcnxny,\ ccnxnycyx \in Cn\emptyset. \tag{1}$$

Z T1b wynika następująca równoważność:

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow cyx \in Cn\emptyset. \tag{2}$$

Z (1) i stąd, że zbiór $Cn\emptyset$ jest domknięty ze względu na regułę odrywania ($T13_T$) otrzymujemy równoważność

$$cyx \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow cnxny \in Cn\emptyset. \tag{3}$$

Wobec $A6_T$ mamy

$$cnxny \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow ny \in Cn\{nx\} \tag{4}$$

Kolejną równoważność

$$ny \in Cn\{nx\} \Longleftrightarrow \neg y \in Cn\{\neg x\}$$

otrzymujemy z T24a i T25a.

Równoważności (2), (3), (4) uzasadniają twierdzenie.

Twierdzenie T27b jest wnioskiem z T27a i T7, twierdzenie zaś T27c jest wnioskiem z T24b, T25b i T27b.

Zdefiniujemy zbiór NX, który nazywać będziemy negacją zbioru X.

$$\text{D9.}\quad x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X.$$

Z podanej definicji i T21 wynika

$$\text{T28.}\quad nx \in NX \Longleftrightarrow x \in X.$$

$$\text{T29.}\quad \bigwedge_{z} x \neq nz \Longrightarrow (x \in X \Longleftrightarrow x,\ nnx \in NNX).$$

Z twierdzenia tego wynika, że do zbioru będącego negacją jakiegoś zbioru należeć mogą nie tylko zdania będące negacjami zdań tego zbioru, lecz również zdania nie rozpoczynające się od negacji. Z twierdzenia tego wynika również, że do zbioru $NN\{x\}$ należą zdania $x$ i $nnx$, o ile tylko zdanie $x$ nie rozpoczyna się od negacji. Można także wykazać, że przy tym samym założeniu zdania $x$, $nnx$ należą do zbioru $N\{nx\}$.

Podajemy dowód T29. Załóżmy najpierw, że $x \in X$. Stąd i z T28 wynika, że $nx \in NX$. Ponieważ zaś z założenia twierdzenia i T22 wynika, że $\neg x = nx$, zatem do NX należy również zdanie $\neg x$. Stosując raz jeszcze definicję D9 otrzymamy, że $x \in NNX$. Z założenia, że $x \in X$ poprzez dwukrotne zastosowanie T28 otrzymamy, że do NNX należy także zdanie $nnx$. Załóżmy teraz, że $nnx \in NNX$. Korzystając znów dwukrotnie z T28 otrzymamy, że $x \in X$. Wniosek ten kończy dowód twierdzenia.

Natychmiastowym wnioskiem z T28 jest twierdzenie

$$\text{T30.}\quad \{nx\} \subset N\{x\}.$$

T30a. $\bigwedge_{z} x \neq nz \Longrightarrow \{nx\} = N\{x\}$,

b. $\bigwedge_{z} x \neq nz \Longrightarrow \{x, nnx\} = N\{nx\}$,

c. $\bigvee_{z} x = nz \Longrightarrow \{nnx\} = N\{nx\}$.

T30a wynika z T30, D9 i D8, w dowodzie twierdzeń T30b i T30c wykorzystujemy ponadto $A10_T$ i T22.

Z twierdzeń T30a-c wynika, że zbiór $N\{x\}$ jest niepustym, co najwyżej dwuelementowym zbiorem zdań.

Z twierdzeń T28 i T30 oraz D9 wynikają następujące twierdzenia:

T31a. $N(X \cup Y) = NX \cup NY$,

b. $N(X \setminus Y) = NX \setminus NY$.

T32a. $NX \cup \{nx\} \subset N(X \cup \{x\})$,

b. $N(X \setminus \{x\}) \subset NX \setminus \{nx\}$.

T33. $X \subset Y \Longleftrightarrow NX \subset NY$

Twierdzenia te oraz

T34*. $Cn'NNX = Cn'X = NNCn'X$

mają charakter pomocniczy.

Następujące twierdzenia podają pewne związki pomiędzy funkcjami $Cn$ i $Cn'$.

T35*. $X \neq \Phi \Longrightarrow NCn\Phi \subset Cn'X$.

Z twierdzenia tego wynika, że każda kontrteza rachunku zdań jest odrzucona ze względu na dowolny niepusty zbiór zdań, podobnie jak każda teza rachunku zdań należy do konsekwencji dowolnego zbioru, w tym również pustego[8].

T36. $X = \emptyset \Longrightarrow CnCn'X = S$.

Podajemy dowód tego twierdzenia. Niech $x$ będzie dowolną tezą rachunku zdań. Stąd z Uwagi 1 i $A3_T$ widać, że $x \in CnCn'X$. Z założenia twierdzenia, T28 i T35 wynika, że $nx \in Cn'X$. Tak więc w myśl $A2_T$ $x, nx \in CnCn'X$. Z $A3_T$, $A4_T$, $A7_T$ i $A2_T$ wynika, że $CnCn'X = S$.

T37*. $NCn'NX \subset CnX$.

Ważne to twierdzenie zilustrujemy przykładem. Niech $X$ będzie zbiorem zdań, o prawdziwości których przekonaliśmy się na drodze doświadczenia. Zbiór $NX$ jest wtedy zbiorem zdań sprzecznych z doświadczeniem. Do zbioru więc $Cn'NX$ należą wszystkie hipotezy odrzucone na podstawie zdań zbioru $NX$. Do zbioru $NCn'NX$ należy każde zdanie sprzeczne z hipotezą. W myśl więc T37 każde takie zdanie jest wyprowadzalne ze zbioru $X$ zdań potwierdzonych przez doświadczenie.

T38*. $Cn\{x\} = NCn'\{nx\} = NCn'N\{x\}$.

W przypadku więc zbiorów jednostkowych w T37 znak inkluzji można zastąpić znakiem równości.

---

[8] Kontrtezami logicznymi nazywamy wyrażenia sprzeczne z tezami logicznymi.

$$\text{T39}^*. \quad X \in Nsp \Longrightarrow CnX \cap Cn'NX = \Phi.$$

Twierdzenie to zilustrujemy znów przykładem. Niech $X$ będzie zbiorem zdań, których prawdziwość została potwierdzona przez doświadczenie. Naturalnym jest założenie, że zbiór ten jest niesprzeczny. Zbiór $NX$ jest wtedy zbiorem zdań sprzecznych z doświadczeniem. W myśl T39 żadne zdanie nie może wynikać ze zdań zbioru $X$ i równocześnie być odrzucone na podstawie zdań zbioru $NX$.

Podamy z kolei pewne związki pomiędzy pojęciami Syst, Nzl, Nsp, Zpł a pojęciami Syst', Nzl', Nsp', Zpł'. O jednym takim związku mówi T13.

$$\text{T40}^*\text{a.} \quad X \in Syst \Longrightarrow NX \in Syst',$$

$$\text{b.} \quad NX \in Syst \Longrightarrow X \in Syst'.$$

$$\text{T41}^*\text{a.} \quad X \in Nsp \Longrightarrow NX \in Nsp',$$

$$\text{b.} \quad NX \in Nsp \Longrightarrow X \in Nsp'.$$

$$\text{T42}^*\text{a.} \quad X \in Zpł' \Longrightarrow NX \in Zpł,$$

$$\text{b.} \quad NX \in Zpł' \Longrightarrow X \in Zpł.$$

$$\text{T43}^*\text{a.} \quad NX \in Nzl' \Longrightarrow X \in Nzl',$$

$$\text{b.} \quad NX \in Nzl \Longrightarrow X \in Nzl'.$$

Podamy teraz dwa twierdzenia, które mówią o systemach zupełnych i systemach zupełnych ze względu na odrzucanie.

$$\text{T44}^*\text{a.} \quad X \in Zpł \cap Syst \vee NX \in Zpł \cap Syst \Longrightarrow X, NX \in Zpł \cap Zpł'$$

$$\text{b.} \quad X \in Zpł' \cap Syst' \vee NX \in Zpł' \cap Syst \Longrightarrow X, NX \in Zpł \cap Zpł'.$$

Następujące twierdzenie ma treść zbliżoną do twierdzenia Lindenbauma:

$$\text{T45.} \quad X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_{Y} (NX \subset Y \wedge Y \in Syst' \cap Nsp' \cap Zpł').$$

O ile przyjmiemy, że zbiór $X$ jest zbiorem zdań potwierdzonych przez doświadczenie (o takich zbiorach zakładamy, że są niesprzeczne), to w myśl T45 dla zbioru będącego negacją zbioru zdań $X$, a więc dla zbioru zdań sprzecznych z doświadczeniem istnieje nadzbiór niesprzeczny i zupełny ze względu na odrzucanie będący systemem ze względu na odrzucanie.

D o w ó d T45. Z twierdzenia Lindenbauma i z założenia dowodzonego twierdzenia wynikają wzory:

$$X \subset Y_1, \tag{1}$$

$$Y_1 \in Nsp \cap Zpł \cap Syst. \tag{2}$$

Z pierwszego wzoru na podstawie T33 wynika, że $NX \subset NY_1$. Ze wzoru drugiego oraz twierdzeń T41a, T44a i T40a wynika, że

$$NY_1 \in Nsp' \cap Zpł' \cap Syst'.$$

Wniosek ten kończy dowód twierdzenia.

Jak się zdaje następujące wyrażenie będące dokładnym odpowiednikiem twierdzenia Lindenbauma

$$X \in Nsp' \Longrightarrow \bigvee_{Y} (X \subset Y \wedge Y \in Nsp' \cap Zpł' \cap Syst')$$

nie jest tezą systemu T.

## § 4. Zdania alternatywne i koniunkcyjne

Podajemy definicje uogólnionej alternatywy i uogólnionej koniunkcji:

D10a. $a(x_1) = x_1$,

b. $a(x_1, x_2) = c\neg x_1 x_2$,

c. $a(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = a(x_1 a(x_2, \ldots, x_{n+1}))$.

Zdania $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy składnikami alternatywy $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

D11a. $k(x_1) = x_1$,

b. $k(x_1, x_2) = ncx_1\neg x_2$,

c. $k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = k(x_1, k(x_2, \ldots, x_{n+1}))$.

Zdania $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy czynnikami koniunkcji $k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. W częściach b. tych definicji występuje obok symbolu "n" symbol "¬". Dla rozważań tego rozdziału zastąpienie w zwykle przyjmowanych definicjach alternatywy i koniunkcji symbolu "n" symbolem "¬" nie jest istotne. Dla dalszych jednak rozważań zmiana ta jest konieczna.

T46a. $cxa(x, y) \in Cn\Phi$,

b. $cya(x, y) \in Cn\Phi$,

c. $ccxzccyzca(x, y)\, z \in Cn\Phi$,

d. $ck(x,y)x \in Cn\,\Phi$,

e. $ck(x,y)y \in Cn\,\Phi$,

f. $cczxcczyczk(x,y) \in Cn\,\Phi$.

Wyrażenia, których dotyczy T46 dołączone do aksjomatów klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań dają, jak wiadomo, układ aksjomatów systemu, w którym terminami pierwotnymi są implikacja, negacja, koniunkcja i alternatywa. Stąd, z Uwagi 1 i $T13_T$ wynika

Uwaga 3. Jeśli $\alpha$ jest wyrażeniem, w którym oprócz zmiennych występują co najwyżej symbole "c", "n", "k" i "a", to wyrażenie

$$\alpha \in Cn\,\Phi$$

jest twierdzeniem teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha$ jest podstawieniem tezy klasycznego rachunku zdań o terminach pierwotnych implikacji, negacji, koniunkcji i alternatywy.

Udowodnimy przykładowo T46d. Ponieważ wyrażenie cncxnyx jest tezą implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań, jest ono więc w myśl Uwagi 1 również elementem zbioru $Cn\,\Phi$. Z Uwagi 2 (rozdz. I, §3) wynika, że elementem tego zbioru jest również wyrażenie cncx¬yx. Stąd i z D11b wynika wzór T46d.

Z Uwag 2 i 3 oraz z definicji uogólnionej alternatywy i uogólnionej koniunkcji wynika natychmiast

Uwaga 4. Zastępując w dowolnym wyrażeniu należącym do $Cn\,\Phi$, w którym oprócz zmiennych występować mogą symbole "n", "¬", "c", "a" i "k", symbol "n" symbolem "¬" lub odwrotnie otrzymujemy wyrażenie należące również do $Cn\,\Phi$.

Z $A6_T$, T46, $T14_T$, $T13_T$ oraz ze wzoru $cxcyk(x,y) \in Cn\,\Phi$ wynika- jącego z Uwagi 3 otrzymujemy następujące twierdzenia

T47a. $Cn\{a\,(x,y)\} = Cn\,\{x\} \cap Cn\,\{y\}$,

b. $Cn\{k\,(x,y)\} = Cn\,\{x,y\}$,

Twierdzenia te należą do aksjomatów podanych przez W.A. Pogorzelskiego w pracy [8] i mówią o związkach pomiędzy zbiorami konsekwencji dwóch zdań oraz zbiorami konsekwencji alternatywy i koniunkcji tych zdań. Następne natomiast twierdzenie omawia analogiczne własności zbiorów zdań odrzuconych.

T48a. $Cn'\{x,y\} \subset Cn'\{a(x,y)\}$,

b. $Cn'\{k(x,y)\} = Cn'\{x\} \cap Cn'\,\{y\}$.

Twierdzenie T48a wynika z T46a,b, T11 oraz T4a.

Podajemy dowód T48b. Niech $z \in Cn\{k(x,y)\}$. Warunek ten na podstawie T1b jest równoważny wyrażeniu $czk(x,y) \in Cn\,\Phi$, które z kolei jest równoważne na podstawie T46f, $T13_T$ i wzorów $cczk(x,y)czx \in Cn\,\Phi$, $cczk(x,y)czy \in Cn\,\Phi$ wynikających z Uwagi 3, wyrażeniu $czx,\ czy \in Cn\,\Phi$.

Wyrażenie to jest równoważne na podstawie T1b wyrażeniu

$z \in Cn'\{x\} \wedge z \in Cn'\,\{y\}$, co kończy dowód twierdzenia.

T49*. $Cn'\{y\} \cap Cn'\{ny\} = Cn'\{ncxx\} = NCn\,\Phi$.

Z twierdzenia tego wnioskujemy, że zbiór zdań odrzuconych na podstawie pewnego zdania i jednocześnie na podstawie jego negacji zawiera wszystkie kontrtezy logiczne. Zauważmy, że podane twierdzenie nie powstaje z $A8_T$ bogatszej teorii systemów przez zastąpie nie symbolu Cn symbolem Cn', ma jednak treść zbliżoną do tego aksjomatu.

Następne twierdzenie odgrywa zasadniczą rolę w dowodach wielu dalszych twierdzeń.

$$\text{T50}^*.\quad Cn\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = NCn'\{nk(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} =$$
$$= NCn'\{a(nx_1, nx_2, \ldots, nx_n)\}.$$

Wprowadzimy teraz dwa nowe pojęcia: pojęcie zbioru wszystkich alternatyw i pojęcie zbioru wszystkich koniunkcji, zbudowanych ze zdań danego zbioru X.

D12. AX jest zbiorem wszystkich alternatyw w sensie D10, zbudowanych z różnych zdań zbioru X.

D13. KX jest zbiorem wszystkich koniunkcji w sensie D11, zbudowanych z różnych zdań zbioru X.

Kilka dalszych twierdzeń, które podajemy ma charakter pomocniczy.

T51a. $X \subset AX$,

b. $X \subset Y \Longleftrightarrow AX \subset AY$,

c. $AX \cup \{x\} \subset A(X \cup \{x\})$,

d. $K\{x\} = \{x\}$.

Twierdzenia te wynikają łatwo z D12 i D13.

T52*a. $Cn'AAX = Cn'AX$,

b. $Cn'ANNX = Cn'AX$.

Pierwsze z tych twierdzeń ma związek z prawem łączności alternaty wy, drugie z prawem podwójnego przeczenia.

T53. $Cn'ANX = Cn'NKX$.

Twierdzenie to ma związek z prawem De Morgana.

Podajemy dowód T53. Niech $y \in ANX$. Z D12 wynika istnien takiego ciągu $z_1, z_2, \ldots, z_n$, że

$$y = a(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (\text{}$$

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \in NX. \qquad (\text{}$$

Stąd zaś i z D9 wynika, że

$$\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n \in X.$$

Ze wzoru (1) oraz Uwag 3 i 4 otrzymujemy

$$cynk(\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n) \in Cn\,\Phi.$$

Niech ciąg $y_1, y_2, \ldots, y_m$ będzie ciągiem wszystkich różnych z ciągu $\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n$. Stąd oraz z Uwag 3 i 4 otrzymujemy wzory

$$cnk(\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n)nk(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Cn\,\Phi,$$

$$ccynk(\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n)ccnk(\neg z_1, \neg z_2, \ldots, \neg z_n)nk(y_1, \ldots, y_m)$$

$$cynk(y_1, \ldots, y_m) \in Cn\,\Phi.$$

Ze wzorów (4), (5) i (6) oraz $T13_T$ mamy

$$cynk(y_1,y_2,\ldots,y_m) \in Cn\emptyset. \tag{7}$$

Z określenia ciągu $y_1,y_2,\ldots,y_m$, z D13, (3) i T28 wynika, że

$$nk(y_1,y_2,\ldots,y_m) \in NKX. \tag{8}$$

Stąd, z (7) oraz T1b otrzymujemy inkluzję $ANX \subset Cn'NKX$, co w myśl T3b,c daje, że $Cn'ANX \subset Cn'NKX$.
W podobny sposób przebiega dowód inkluzji odwrotnej. Twierdzenie T53 jest więc prawdziwe.

Podamy teraz twierdzenia, które ustalają związki pomiędzy funkcjami Cn i Cn'.

T54. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (CnX = NCn'ANX = NCn'NKX)$.

D o w ó d. Niech $y \in CnX$. Na podstawie założenia twierdzenia i $A5_T$ wnioskujemy, że istnieją takie różne zdania $x_1,x_2,\ldots,x_n$, że

$$x_1,x_2,\ldots,x_n \in X, \tag{1}$$

$$y \in Cn\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}. \tag{2}$$

Z (2), T50 i D9 wynika, że

$$\neg y \in Cn'\{nk(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}. \tag{3}$$

Z (1), D13 i T28 wynika, że

$$nk(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in NKX. \tag{4}$$

Ze wzorów (4) i (3) oraz T9 otrzymujemy

$$\neg y \in Cn'NKX.$$

Stąd zaś na podstawie D9 mamy

$$y \in NCn'NKX.$$

Tak więc udowodniliśmy inkluzję

$$CnX \subset NCn'NKX.$$

Załóżmy teraz, że

$$z \in NCn'ANX.$$

Na podstawie D9 mamy

$$\neg z \in Cn'ANX.$$

Na podstawie T1b i D12 wnioskujemy, że istnieje takie zdanie i taki ciąg zdań $u_1, u_2, \ldots, u_k$, że

$$y_1 = a(u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

$$u_1, u_2, \ldots, u_k \in NX,$$

$$c\neg za(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in Cn\Phi.$$

Ze wzoru (12), T21 oraz Uwagi 4 wynika, że

$$c\neg za(n\neg u_1, n\neg u_2, \ldots, n\neg u_k) \in Cn\Phi.$$

Ze wzoru tego i T1b otrzymujemy, że

$$\neg z \in Cn'\{a(n\neg u_1, n\neg u_2, \ldots, n\neg u_k)\}, \tag{14}$$

stąd zaś i z D9 widzimy, że

$$z \in NCn'\{a(n\neg u_1, n\neg u_2, \ldots, n\neg u_k)\}. \tag{15}$$

Ze wzoru (11) i D9 wynika jednak, że

$$\neg u_1, \neg u_2, \ldots, \neg u_k \in X, \tag{16}$$

a więc w myśl T50, $A3_T$ oraz wzoru (15)

$$z \in CnX. \tag{17}$$

Tak więc

$$NCn'ANX \subset CnX. \tag{18}$$

Ze wzoru (7) i (18) oraz T53 wynika już twierdzenie.

Z aksjomatów $A2_T$, $A3_T$, $A4_T$ oraz z Uwagi 1 wynika, że

$$CnX = Cn(X \cup \{cxx\}).$$

Ze wzoru tego oraz twierdzeń T54 i T53 natychmiast wynika

T55. $CnX = NCn'AN(X \cup \{cxx\}) = NCn'NK(X \cup \{cxx\})$.

Z twierdzeń T55 i T30a oraz D12 otrzymujemy twierdzenie

T56. $Cn\emptyset = NCn'\{ncxx\}$.

T57. $CnX = NCn'(ANX \cup \{ncxx\}) = NCn'N(KX \cup \{cxx\})$.

D o w ó d. Z twierdzeń T49, T3b i T4 wynika, że

$$X \neq \Phi \Longrightarrow Cn'X = Cn'(X \cup \{ncxx\}). \qquad (1)$$

Ze wzoru tego i T54 otrzymujemy

$$X = \Phi \Longrightarrow CnX = NCn'(ANX \cup \{ncxx\}). \qquad (2)$$

Z twierdzenia T56 oraz definicji D9 i D12 wynika, że

$$X = \Phi \Longrightarrow CnX = NCn'(ANX \cup \{ncxx\}). \qquad (3)$$

Wobec wzorów (2) i (3) zachodzi wzór

$$CnX = NCn'(ANX \cup \{ncxx\}). \qquad (4)$$

Prawa strona równości (4) jest identyczna z $NCn'(NKX \cup N\{cxx\})$, co wynika z twierdzeń T4, T53 i T30a, a zbiór ten z kolei jest identyczny ze zbiorem $NCn'N(KX \cup \{cxx\})$ na podstawie twierdzenia T31a. Tak więc

$$CnX = NCn'(ANX \cup \{ncxx\}) = NCn'N(KX \cup \{cxx\}).$$

Twierdzenia T55 i T57 wskazują w jaki sposób funkcję Cn można zdefiniować przy pomocy funkcji $Cn'$. Z uwagi tej oraz trzech dalszych twierdzeń skorzystamy w rozdziale III.

T58*. $x, y \in CnX \Longrightarrow a(x,y) \in Cn'AX,$

T59*. $k(x,y) \in Cn'X \Longrightarrow y \in Cn'A(X \cup \{nx\}),$

T60*. $y \in Cn'A(X \cup N\{x\}) \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\}).$

Wnioskiem z T54 jest następujące twierdzenie związane treściowo z T39.

T61. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (X \in Nsp \Longleftrightarrow CnX \cap Cn'ANX = \emptyset)$[9].

Podamy teraz kilka twierdzeń, które podobnie jak twierdzenia T40 - T42 wyznaczają związki pomiędzy pojęciami Syst, Nsp, Zpł, a pojęciami Syst', Nsp', Zpł'. Dowody tych twierdzeń opierają się istotnie na T54. Ze względu na niezbyt istotny charakter tych twierdzeń, dowody ich pomijamy.

T62a. $X \in Syst \Longrightarrow ANX \in Syst'$,

b. $NX \in Syst \Longrightarrow AX \in Syst'$,

c. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (NAX \in Syst \Longleftrightarrow AX \in Syst')$.

T63a. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (X \in Nsp \Longleftrightarrow ANX \in Nsp')$,

b. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (NX \in Nsp \Longleftrightarrow AX \in Nsp')$,

c. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (NAX \in Nsp \Longleftrightarrow AX \in Nsp')$.

T64a. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (X \in Zpł \Longleftrightarrow ANX \in Zpł')$,

b. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (NX \in Zpł \Longleftrightarrow AX \in Zpł')$,

c. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (NAX \in Zpł \Longleftrightarrow AX \in Zpł')$.

O ile zbiory Nsp' i Zpł' zdefiniujemy analogicznie do $D5_T$ i $D6_T$, to wyrażenie

$$X \in Nsp' \Longrightarrow \bigvee_Y (X \subset Y \wedge Y \in Nsp' \cap Zpł' \cap Syst') \qquad (\varphi)$$

9) Na twierdzenie to zwrócił moją uwagę G. Bryll.

byłoby primowanym odpowiednikiem twierdzenia Lindenbauma, a więc byłoby tezą teorii T. Gdy jednak zbiory te zostaną zdefiniowane tak jak w § 2, to wyrażenie ($\varphi$) nie jest odpowiednikiem twierdzenia Lindenbauma. Zagadnienie, czy wyrażenie ($\varphi$) jest tezą teorii T, gdy terminy Nsp′ i Zpł′ rozumieć będziemy zgodnie z D6 i D7, nie jest jak się zdaje zagadnieniem łatwym. Natomiast łatwo daje się udowodnić następujące twierdzenie będące szczególnym przypadkiem wyrażenia ($\varphi$)

$$\text{T65.}\quad X \neq \emptyset \Longrightarrow [AX \in Nsp' \Longrightarrow \bigvee_{Y} (AX \subset Y \wedge Y \in Nsp' \cap Zp\ell' \cap Syst')] .$$

D o w ó d. Z założeń twierdzenia i T63b wynika, że $NX \in Nsp$. Z twierdzenia Lindenbauma wynika więc istnienie takiego zbioru $Y_1$, że

$$NX \subset Y_1, \tag{1}$$

$$Y_1 \in Nsp \cap Zp\ell \cap Syst. \tag{2}$$

Ze wzoru (1) oraz twierdzeń T33 i T51b wynika wzór

$$ANNX \subset ANY_1. \tag{3}$$

Z części a. twierdzeń T62, T63, T64 oraz wzoru (2) otrzymujemy

$$ANY_1 \in Nsp' \cap Zp\ell' \cap Syst'. \tag{4}$$

Ze wzorów (3) i (4), twierdzenia T3b oraz D2 wynika, że

$$Cn' ANNX \subset ANY_1. \tag{5}$$

Z twierdzeń T52b i T3a oraz wzoru (5) otrzymujemy, że $AX \subset ANY_1$. Stąd i ze wzoru (4) wynika teza twierdzenia.

## R o z d z i a ł  II

## TEORIA $T_1$ KONSEKWENCJI JEDNOSTKOWEJ

### § 1. Zasadnicze własności funkcji $Cn_1$

Jedynymi terminami pierwotnymi teorii $T_1$ są terminy $S$ i $Cn_1$. Sens terminu $S$ jest taki sam jak w teorii $T$. Sens funkcji $Cn_1$, którą nazywać będziemy konsekwencją jednostkową, określa następujący aksjomat[10]:

$$A_1 1. \quad y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}.$$

Intuicje związane z aksjomatem $A_1 1$ zostaną omówione nieco dalej.

Wykażemy przede wszystkim, że funkcja $Cn_1$ spełnia aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego i jest addytywna.

$$T_1 1. \quad X \subset Cn_1 X \subset S.$$

D o w ó d. Niech $y \in X$. Wynika stąd istnienie takiego zdania $x \in X$, że $Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}$ (zdaniem tym jest oczywiście zdanie $y$). Stąd i z $A_1 1$ wynika, że $y \in Cn_1 X$. Twierdzenie jest więc prawdziwe.

$$T_1 2. \quad X \subset Y \Longrightarrow Cn_1 X \subset Cn_1 Y$$

10) Zachowujemy umowę dotyczącą liter $x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots$

D o w ó d. Niech $y \in Cn_1X$. W myśl $A_1 1$ prawdziwe jest więc wyrażenie $\bigvee_{x \in X} Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}$. Stąd i z założenia twierdzenia wynika że $\bigvee_{x \in Y} Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}$, co w myśl aksjomatu $A_1 1$ pozwala wnioskować, że $y \in Cn_1Y$. Dowód jest więc zakończony.

$T_1 3$. $Cn_1Cn_1X \subset Cn_1X$.

D o w ó d. Niech $y \in Cn_1Cn_1X$. Stąd i z $A_1 1$ wynika istnienie takiego zdania $z_1$, że

$$z_1 \in Cn_1X, \tag{1}$$

$$Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{z_1\}. \tag{2}$$

Ze wzoru (1) oraz $A_1 1$ wynika z kolei istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X, \tag{3}$$

$$Cn_1\{z_1\} \subset Cn_1\{x_1\}. \tag{4}$$

Ze wzorów (2) i (4) otrzymujemy

$$Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x_1\}. \tag{5}$$

Tak więc z (3) i (5) mamy $\bigvee_{x \in X} Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}$, co w myśl $A_1 1$ pozwala wnioskować, że $y \in Cn_1X$. Wniosek ten kończy dowód twierdzenia.

$T_1 4.$ $y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn_1 \{x\}$

Jeśli więc jakieś zdanie jest konsekwencją jednostkową zdań pewnego zbioru $X$, to jest ono konsekwencją jednostkową jednego tylko zdania zbioru $X$ i odwrotnie. Twierdzenie to usprawiedliwia nazwanie funkcji $Cn_1$ konsekwencją jednostkową. Zauważmy, że przyjmując $T_1 4$ jako jedyny aksjomat w miejsce $A_1 1$ otrzymamy teorię węższą.

Podajemy dowód $T_1 4$. Niech $y \in Cn_1 X$. W myśl $A_1 1$ istnieje więc takie zdanie $x_1$, że

$$x_1 \in X, \tag{1}$$

jeśli

$$y \in Cn_1\{y\}, \text{ to } y \in Cn_1\{x_1\}. \tag{2}$$

Stąd jednak w myśl $T_1 1$ otrzymujemy, że

$$y \in Cn_1\{x_1\} \tag{3}$$

Ze wzorów (1) i (3) mamy

$$\bigvee_{x \in X} y \in Cn_1\{x\}. \tag{4}$$

Załóżmy teraz, że

$$\bigvee_{x \in X} y \in Cn_1\{x\}. \tag{5}$$

Niech $x_2$ będzie zdaniem spełniającym warunki

$$x_2 \in X, \tag{6}$$

$$y \in Cn_1\{x_2\}. \tag{7}$$

Istnienie takiego zdania gwarantuje wzór (5).
Ze wzoru (7) oraz twierdzeń $T_1 2$ i $T_1 3$ otrzymujemy

$$Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x_2\}. \tag{8}$$

Stąd zaś i z (6) oraz $A_1 1$ wynika, że

$$y \in Cn_1 X. \tag{9}$$

Tak więc udowodniliśmy, że wyrażenia (4) i (9) są równoważne. Kończy to dowód twierdzenia.

Bezpośrednim wnioskiem z $T_1 4$ jest

$T_1 5.$ $\quad x \in Cn_1 X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn_1 Y).$

$T_1 6.$ $\quad Cn_1 X \cup Cn_1 Y = Cn_1 (X \cup Y).$

Twierdzenie to mówi, że konsekwencja jednostkowa jest funkcją addytywną.

Podajemy dowód $T_1 6$. Inkluzja

$$Cn_1 X \cup Cn_1 Y \subset Cn_1 (X \cup Y) \tag{1}$$

jest natychmiastowym wnioskiem z $T_1 2$.

Załóżmy, że $y \in Cn_1 (X \cup Y)$. Stąd i z $T_1 4$ wynika istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X \cup Y, \tag{2}$$

$$y \in Cn_1\{x_1\}. \tag{3}$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy $x_1$ jest zdaniem zbioru X. Wtedy w myśl $T_1 4$ i (3) $y \in Cn_1 X$, a więc $y \in Cn_1 X \cup Cn_1 Y$. W przypadku, gdy $x_1 \in Y$ analogicznie otrzymamy, że $y \in Cn_1 Y$, a więc $y \in Cn_1 X \cup Cn_1 Y$. W myśl więc (2) i (3) $y \in Cn_1 X \cup Cn_1 Y$. Zachodzi zatem inkluzja

$$Cn_1(X \cup Y) \subset Cn_1 X \cup Cn_1 Y. \tag{4}$$

Ze wzorów (1) i (4) wynika dowodzona równość.

Wykazaliśmy, że konsekwencja jednostkowa jest addytywna i spełnia aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego. Udowodnimy, że zachodzi również twierdzenie odwrotne:

Każda addytywna funkcja F spełniająca aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego oraz wzór $F\emptyset = \emptyset$ spełnia $A_1 1$.

Na funkcję F nakładamy więc następujące warunki:

a. $F(X \cup Y) = FX \cup FY$,

b. $X \subset FX$,

c. $X \subset Y \Longrightarrow FX \subset FY$,

d. $FFX \subset FX$,

e. $x \in FX \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\bar{\bar{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in FY)$,

f. $F\emptyset = \emptyset$.

Udowodnimy, że prawdziwe jest wyrażenie

$$y \in FX \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} F\{y\} \subset F\{x\}.$$

Załóżmy najpierw, że $y \in FX$. Zgodnie ze wzorami f. i e. istnieje taki układ zdań $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \in X, \tag{1}$$

$$y \in F\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{2}$$

Z (2) oraz warunku a. wynika, że

$$y \in F\{y_1\} \cup F\{y_2\} \cup \ldots \cup F\{y_n\}. \tag{3}$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$\bigvee_{x \in X} y \in F\{x\}. \tag{4}$$

Ze wzoru tego oraz warunków c. i d. otrzymamy

$$\bigvee_{x \in X} F\{y\} \subset F\{x\}. \tag{5}$$

Załóżmy teraz istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X, \tag{6}$$

$$F\{y\} \subset F\{x_1\}. \tag{7}$$

Ze wzoru (7) i warunku b. wynika, że

$$y \in F\{x_1\}. \tag{8}$$

Ze wzorów (6) i (8) oraz warunku c. otrzymujemy, że

$$y \in FX. \tag{9}$$

Tak więc wyrażenia (5) i (9) są równoważne.

## § 2. Jednostkowość funkcji $Cn'$

W paragrafie tym udowodnimy na gruncie definicji zbioru zdań odrzuconych oraz aksjomatów ogólnej teorii systemów Tarskiego, że funkcja $Cn'$ jest konsekwencją jednostkową, a więc że spełniony jest wzór

$$y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn'\{y\} \subset Cn'\{x\}. \qquad (\alpha)$$

W tym celu załóżmy najpierw, że

$$y \in Cn'X. \qquad (1)$$

Stąd i z D1 wynika istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X, \qquad (2)$$

$$x_1 \in Cn\{y\}. \qquad (3)$$

Załóżmy dodatkowo, że

$$z \in Cn'\{y\}. \qquad (4)$$

Stąd i z D1 otrzymujemy, że

$$y \in Cn\{z\}. \qquad (5)$$

Ze wzorów (5) i (3) oraz aksjomatów $A3_T$, $A4_T$ wynika, że

$$x_1 \in Cn\{z\}.$$

Stąd, znów w myśl D1

$$z \in Cn'\{x_1\}.$$

Ze wzoru (4) otrzymaliśmy wzór (7). Prawdziwa jest więc inkluzja

$$Cn'\{y\} \subset Cn'\{x_1\}. \tag{8}$$

Z inkluzji tej na podstawie wzoru (2) wynika wzór

$$\bigvee_{x \in X} Cn'\{y\} \subset Cn'\{x\}. \tag{9}$$

Załóżmy teraz istnienie takiego zdania $x_2$, że

$$x_2 \in X, \tag{10}$$

$$Cn'\{y\} \subset Cn'\{x_2\}. \tag{11}$$

W myśl (11) spełniona jest implikacja

$$\text{jeśli} \quad y \in Cn'\{y\}, \quad \text{to} \quad y \in Cn'\{x_2\}. \tag{12}$$

Z $A2_T$ wynika jednak, że

$$\bigvee_{x \in \{y\}} x \in Cn\{y\}, \tag{13}$$

a więc na podstawie D1

$$y \in Cn'\{y\}. \tag{14}$$

Stąd i z (12) wnioskujemy, że

$$y \in Cn'\{x_2\}. \tag{15}$$

Z ostatniego wzoru na podstawie D1 otrzymujemy, że

$$x_2 \in Cn\{y\}. \tag{16}$$

W myśl wzoru (10) $x_2 \in X$, a więc

$$\bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\}. \tag{17}$$

Ze wzoru (17) przez ponowne wykorzystanie D1 otrzymujemy, że

$$y \in Cn'X. \tag{18}$$

Wykazaliśmy więc, że wyrażenia (9) i (18) są równoważne.

Z udowodnionego twierdzenia oraz rozważań poprzedniego paragrafu wynika, że na gruncie teorii T twierdzeniami są T3, T4, i T9, co zostało udowodnione w § 1 rozdziału I w inny sposób.

## § 3. Jednostkowość konsekwencji $Cn^*$

W paragrafie tym omówimy własności funkcji $Cn^*$ określonej w następujący sposób:

$D^*1$. $Cn^* X = NCn'NX$.

Wykażemy, że funkcja $Cn^*$ jest konsekwencją jednostkową, a więc że spełniony jest warunek

$$y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn^*\{y\} \subset Cn^*\{x\}. \tag{$\beta$}$$

Dowód oprzemy wyłącznie na następujących założeniach:

a. $y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn'\{y\} \subset Cn'\{x\}$,

b. $y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny$,

c. $x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X$,

d. $nx \in Cn' X \Longleftrightarrow \neg x \in Cn' X$,

e. $Cn' N \{x\} \subset Cn' \{nx\}$.

Zauważmy, że w założeniach tych nie występuje symbol $Cn$, co będzie istotne dla rozważań następnego rozdziału.

Z rozważań § 1 rozdziału II wynika, że konsekwencjami założenia a. są wyrażenia:

f. $X \subset Cn' X$,

g. $X \subset Y \Longleftrightarrow Cn' X \subset Cn' Y$.

Z założeń b. i c. wynikają natomiast wyrażenia:

h. $x \in N \{\neg x\}$,

i. $\{nx\} \subset N \{x\}$,

j. $X \subset Y \Longrightarrow NX \subset NY$.

Podajemy dowód twierdzenia ($\beta$). Niech $y \in Cn^* X$. Stąd z $D^* 1$ oraz założenia c. wynika, że

$$\neg y \in Cn' NX. \tag{1}$$

Stąd i z d. otrzymujemy

$$ny \in Cn' NX \tag{2}$$

Z (2) i założenia a. wynika istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in NX, \tag{3}$$

$$Cn' \{ny\} \subset Cn' \{x_1\}. \tag{4}$$

Ze wzoru (4) oraz założenia e. otrzymujemy

$$Cn'N\{y\} \subset Cn'\{x_1\}. \tag{5}$$

W myśl więc wzorów h, g i j. zachodzi wzór

$$NCn'N\,\{y\} \subset NCn'N\{\neg x_1\}. \tag{6}$$

Ze wzoru (3) oraz z założenia c. mamy

$$\neg x_1 \in X, \tag{7}$$

zaś ze wzoru (6) i $D^*1$ wynika, że

$$Cn^*\{y\} \subset Cn^*\{\neg x_1\}. \tag{8}$$

Z (7) i (8) otrzymujemy więc

$$\bigvee_{x \in X} Cn^*\{y\} \subset Cn^*\{x\}. \tag{9}$$

Załóżmy teraz istnienie takiego zdania $x_2$, że

$$x_2 \in X, \tag{10}$$

$$Cn^*\{y\} \subset Cn^*\{x_2\}. \tag{11}$$

Ze wzoru (10) oraz j. i g. wynika, że

$$Cn'N\{x_2\} \subset Cn'NX. \tag{12}$$

Korzystając ponownie z j. otrzymamy

$$NCn'N\{x_2\} \subset NCn'NX. \tag{13}$$

W myśl więc $D^*1$

$$Cn^*\{x_2\} \subset Cn^*X. \tag{14}$$

Ze wzorów i. i f. wynika dalej, że

$$ny \in Cn'N\{y\}, \tag{15}$$

a więc w myśl d.

$$\neg y \in Cn'N\{y\}. \tag{16}$$

Stąd i z założenia c. otrzymujemy

$$y \in NCn'N\{y\}, \tag{17}$$

co w myśl $D^*1$ znaczy, że

$$y \in Cn^*\{y\}. \tag{18}$$

Ze wzorów (18), (11) i (14) otrzymujemy, że

$$y \in Cn^*X. \tag{19}$$

Wykazaliśmy, że wyrażenia (9) i (19) są równoważne.

Ponieważ założenia a.–e. są definicjami lub twierdzeniami teorii $T$ przeto twierdzeniem tej teorii wzbogaconej o $D^*1$ jest również wyrażenie ($\beta$). Zauważmy, że na gruncie teorii $T$, do której została dołączona definicja $D^*1$ dowód twierdzenia ($\beta$) przebiega wyraźnie prościej. Dla rozważań następnego rozdziału istotnym jest jednak, że twierdzenie to wynika z założeń a.–e. i $D^*1$.

## R o z d z i a ł III

# TEORIA T′

## § 1. Aksjomaty teorii T′

W paragrafie niniejszym podamy aksjomaty teorii T′, której układ pojęć pierwotnych różni się od układu pojęć pierwotnych teorii T tym tylko, że w miejsce funkcji Cn wystąpi funkcja Cn′.

Aksjomaty budowanej teorii będą zanotowane przy pomocy terminów których definicje są następujące:

D′1. $y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny,$

D′2. $x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X,$

D′3a. $a(x_1) = x_1,$

b. $a(x_1, x_2) = c\neg x_1 x_2,$

c. $a(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = a(x_1 a(x_2, \ldots, x_{n+1})).$

D′4a. $k(x_1) = x_1,$

b. $k(x_1, x_2) = nc x_1 \neg x_2,$

c. $k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = k(x_1 k(x_2, \ldots, x_{n+1})).$

D'5. AX jest zbiorem wszystkich alternatyw w sensie D'3 zbudowanych z różnych zdań zbioru X.

D'6. KX jest zbiorem wszystkich koniunkcji w sensie D'4 zbudowanych z różnych zdań zbioru X.

Podane definicje są powtórzeniem definicji D8 - D13 rozdziału I.

Notując aksjomaty teorii T' przyjmujemy, że litery x, y, z, ... oznaczają dowolne zdania zbioru S, litery zaś X, Y, Z, ... oznaczają dowolne podzbiory zbioru S. Zwracamy uwagę, że S należy do pojęć pierwotnych budowanej teorii.

Notujemy aksjomaty:

A'1. $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$,

A'2. $x, y \in S \Longrightarrow nx, cxy \in S$,

A'3. $y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn'\{y\} \subset Cn'\{x\}$,

A'4. $y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow nx \in Cn'\{ny\}$,

A'5. $Cn'\{y\} \cap Cn'\{ny\} = Cn'\{ncxx\}$,

A'6. $nx \in Cn'X \Longleftrightarrow \neg x \in Cn'X$,

A'7. $x, y \in Cn'X \Longrightarrow a(x,y) \in Cn'AX$,

A'8. $Cn'AX = Cn'AAX$,

A'9. $Cn'ANX = Cn'NKX$,

$\sim(y \to x)$ $d\,Cn(X \cup \{x\})$

A'10. $k(x,y) \in Cn'X \Longrightarrow y \in Cn'A(X \cup \{nx\})$,

A'11. $y \in Cn'A(X \cup N\{x\}) \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\})$,

A'12. $nx = ny \Longrightarrow x = y$.

Omówimy podane aksjomaty: aksjomaty $A'1$ i $A'2$ są powtórzeniem pierwszego i ostatniego aksjomatu teorii systemów Tarskiego. Powtórzeniem aksjomatu $A10_T$ dołączonego do aksjomatów Tarskiego w teorii $T$ jest również aksjomat $A'12$. Aksjomat $A'3$ mówi, że funkcja $Cn'$ jest konsekwencją jednostkową. Stąd i z rozważań § 1 rozdziału II wynika, że funkcja $Cn'$ spełnia aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego i jest addytywna. Prawdziwe są więc w teorii $T'$ następujące twierdzenia:

$T'1$a. $X \subset Cn'X \subset S$,

b. $X \subset Y \Longrightarrow Cn'X \subset Cn'Y$,

c. $Cn'Cn'X \subset Cn'X$,

d. $y \in Cn'X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\bar{\bar{Y}} < \aleph_0 \wedge y \in Cn'Y)$,

e. $y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn'\{x\}$.

$T'2$. $Cn'X \cup Cn'Y = Cn'(X \cup Y)$.

Następny aksjomat, czyli $A'4$ związany jest z prawem kontrapozycji. W teorii $T'$ można udowodnić, że do zbioru zdań odrzuconych na podstawie zdania sprzecznego z dowolną tezą klasycznego rachunku zdań należą te i tylko te zdania, które są sprzeczne z dowolnym zdaniem zbioru $Cn\emptyset$. W myśl więc aksjomatu $A'5$ każde zdanie odrzucone na podstawie pewnego zdania i jednocześnie na podstawie jego negacji jest zdaniem sprzecznym względem pewnego zdania zbioru $Cn\emptyset$ i odwrotnie. W myśl $A'6$ negacja jakiegoś zdania $x$ jest odrzucona na podstawie zdań pewnego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie sprzeczne ze zdaniem $x$ jest odrzucone na podstawie zdań tego zbioru. Zgodnie z $A'7$, o ile jakieś zdania są odrzucone na podstawie pewnego zbioru $X$, to ich alternatywa jest odrzucona na podstawie zbioru alternatyw zdań zbioru $X$. Następne dwa aksjomaty $A'8$ i $A'9$ związane są odpowiednio z prawem De Morgana i z prawem łączności alternatywy.

Aksjomaty $A'10$ i $A'11$ mogą być zastąpione przez następującą grupę zdań, których sens intuicyjny wydaje się jasny:

($\alpha$) $x \in Cn'\{z\} \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'\{z\}$,

($\beta$) $y \in Cn'\{a(nx,z)\} \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'\{z\}$,

($\gamma$) $y \in Cn'\{nx\} \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'\{z\}$,

($\delta$) $k(x,y) \in Cn'\{z\} \Longrightarrow y \in Cn'\{a(nx,z)\}$,

($\varepsilon$) Jeżeli $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jest dowolną permutacją liczb $1, 2, 3, \ldots, n$, to $Cn'\ a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Cn'\ a(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$.

Podamy teraz kilka wniosków wynikających z przyjętych w tym paragrafie definicji. Ponieważ definicje te są powtórzeniem D8 – D1[?] rozdziału I, wnioski które podamy należą jednocześnie do teorii T, niektóre też z nich były sformułowane wcześniej.

Z $D'1$ i $D'2$ otrzymujemy:

T'3a. $\neg nx = x$,

b. $\bigwedge_z x \neq nz \Longrightarrow \neg x = nx$,

c. $nx \in NX \Longleftrightarrow x \in X$,

d. $\{nx\} \subset N\{x\}$,

e. $x \in N\{\neg x\}$,

f. $NX \cup NY = N(X \cup Y)$,

g. $NX \cap NY = N(X \cap Y)$,

h. $X \subset Y \Longleftrightarrow NX \subset NY$.

Z $D'3$ i $D'4$ oraz z $T'3a$ wynika

$T'4a$. $\neg k(x,y) = a(nx, \neg y)$,

b. $k(x, ny) = ncxy$,

Z $D'5$ i $D'6$ otrzymujemy:

$T'5a$. $K\Phi = \Phi$,

b. $K\{x\} = \{x\}$,

c. $X \subset KX$,

d. $X \subset Y \Longleftrightarrow KX \subset KY$,

e. $X \subset AX$,

f. $X \subset Y \Longleftrightarrow AX \subset AY$.

W dowodach dalszych twierdzeń korzystać już będziemy z aksjomatów teorii $T'$. Podajemy przede wszystkim twierdzenia, w których występuje symbol $Cn'$.

$T'6$. $Cn'\Phi = \Phi$ .

Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z $A'3$.

T′7. $Cn'\{x\} = Cn'\{nnx\}$.

D o w ó d. Korzystając dwukrotnie z A′4 otrzymamy następującą równoważność

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow nny \in Cn'\{nnx\}. \tag{1}$$

Z A′6 oraz T′3a otrzymujemy

$$nny \in Cn'\{nnx\} \Longleftrightarrow y \in Cn'\{nnx\}.$$

Stąd i wobec (1) otrzymujemy równoważność

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow y \in Cn'\{nnx\}.$$

Ze wzoru tego wynika natychmiast twierdzenie T′7.

T′8. $Cn'\{nx\} = Cn'N\{x\}$

D o w ó d. Z twierdzeń T′3d i T′1b wynika natychmiast inkluzja $Cn'\{nx\} \subset Cn'N\{x\}$. Wystarczy zatem wykazać, że zachodzi również zawieranie odwrotne. Załóżmy w tym celu, że $y \in Cn'N\{x\}$. Stąd na mocy T′1e wynika istnienie takiego zdania z, że $z \in N\{x\}$ i $y \in Cn'\{z\}$, co wobec D′2 oraz aksjomatów A′4 i A′6 daje, że $\neg z = x$ i $\neg z \in Cn'\{ny\}$. Podstawiając w wyrażeniu $\neg z \in Cn\{ny\}$ w miejsce $\neg z$ zdanie x i ponownie wykorzystując A′4 i A′6 otrzymujemy, że $\neg ny \in Cn'\{nx\}$, a więc zgodnie z T′3a $y \in Cn'\{nx\}$. Wykazaliśmy zatem, że $Cn'N\{x\} \subset Cn'\{nx\}$, co kończy dowód twierdzenia T′8.

T′9. $Cn'\{nk(x,nx)\} = S$.

D o w ó d. To, że zbiór $Cn'\{nk(x,nx)\}$ zawiera się w S wynika natychmiast z T′1a. Dla udowodnienia T′9 wystarczy więc tylko pokazać, że dowolne zdanie jest odrzucone na podstawie zbioru, którego jedynym elementem jest $nk(x,nx)$. I rzeczywiście, zgodnie z $T'1a$ i $A'5$ $ncxx \in Cn'\{ny\}$, skąd na podstawie $A'4$ wynika, że $y \in Cn'\{cxx\}$. Zbiór $Cn'\{cxx\}$ zawiera się w zbiorze $Cn'\{nk(x,nx)\}$, gdyż zgodnie z $T'4b$ i $T'3a$ $\neg k(x,nx) = cxx$, zaś zbiór $Cn'\{k(x,nx)\}$ zawarty jest w zbiorze $Cn'\{nk(x,nx)\}$ na podstawie $A'6$ i $T'1a$, b, c. Wykazaliśmy przeto, że dowolne zdanie należy do $Cn'\{nk(x,nx)\}$. Kończy to dowód równości $T'9$.

Zdefiniujemy teraz funkcję $Cn'$, o której była mowa w § 3 rozdziału II. Funkcja ta odegra zasadniczą rolę w dowodach aksjomatów ogólnej teorii systemów Tarskiego na gruncie teorii $T'$.

$D'7.$ $Cn^*X = NCn'NX.$

Podajemy własności funkcji $Cn^*$.

$T'10.$ $y \in Cn^*X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn^*\{y\} \subset Cn^*\{x\}.$

Funkcja $Cn^*$ jest więc konsekwencją jednostkową, co zostało już udowodnione w § 3 rozdziału II, przy pomocy pewnych założeń, które są aksjomatami, definicjami bądź twierdzeniami teorii $T'$ (zob. $A'3$, $A'6$, $D'1$, $D'2$, $T'8$).

Z rozważań § 1 rozdziału II oraz $T'10$ wynikają natychmiast następujące twierdzenia:

$T'11a.$ $X \subset Cn^*X \subset S,$

b. $X \subset Y \Longrightarrow Cn^*X \subset Cn^*Y,$

c. $Cn^*Cn^*X \subset Cn^*X,$

d. $y \in Cn^*X \Longrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn^*\{x\},$

$T'12.$ $Cn^*X \cup Cn^*Y = Cn^*(X \cup Y).$

Widzimy więc, że funkcja $Cn^*$ spełnia aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego i jest addytywna.

Następujące twierdzenie jest łatwym wnioskiem z T'6 oraz D'2 i D'7.

T'13. $Cn^* \Phi = \Phi$.

T'14. $KCn^* KX \subset Cn^* KX$.

D o w ó d. Załóżmy dla dowodu, że $y \in KCn^*KX$. Wynika stąd zgodnie z D'6 istnienie ciągu zdań $y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniającego wzory

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \in Cn^* KX, \tag{1}$$

$$y = k(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Ze wzoru (1) oraz definicji D'7 i D'2 otrzymujemy, że $\neg y_1, \neg y_2, \ldots, \neg y_n \in Cn' NKX$, skąd na podstawie A'9 i A'6 wynika, że

$$ny_1, ny_2, \ldots, ny_{n-1}, \neg y_n \in Cn' ANX. \tag{3}$$

Z (3) na podstawie A'7, A'8 i D'3a,c otrzymujemy

$$a(ny_1, ny_2, \ldots, ny_{n-1}, \neg y_n) \in Cn' ANX. \tag{4}$$

Alternatywa $a(ny_1, ny_2, ny_{n-1}, \neg y_n)$ jest na podstawie D'3a,c, D'4a,c oraz T'4a identyczna z $\neg k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Zastępując ją w (4) przez $\neg k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, a następnie uwzględniając A'9 i D'2 otrzymujemy, że $k(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in NCn' NKX$, co w myśl wzoru (2) oraz D'7 daje, że $y \in Cn^* KX$. Wykazaliśmy zatem, że każde zdanie należące do zbioru $KCn^* KX$ należy też do zbioru $Cn^* KX$.

T′15. $X \neq \Phi \Longrightarrow Cn^{*}(X \cup \{cxx\}) = Cn^{*}X$.

D o w ó d. Z założenia twierdzenia oraz A′5 i T′1b wynika łatwo, że $Cn'\{ncxx\} \subset Cn'NX$. Stąd na podstawie T′8 i T′3h otrzymujemy, że $NCn'N\{cxx\} \subset NCn'NX$, co w myśl D′7 daje inkluzję $Cn^{*}\{cxx\} \subset Cn^{*}X$. Z inkluzji tej i z równości $Cn^{*}(X \cup \{cxx\}) = Cn^{*}X \cup Cn^{*}\{cxx\}$ wynikającej z T′12 otrzymujemy łatwo tezę dowodzonego twierdzenia.

Wprowadzimy teraz zasadniczą dla rozważań tego rodziału definicję funkcji Cn.

D′8. $CnX = NCn'N(KX \cup \{cxx\})$.

Posługując się symbolem $Cn^{*}$ wprowadzonym w D′7, definicję D′8 możemy zanotować w prostszy sposób:

T′16. $CnX = Cn^{*}(KX \cup \{cxx\})$.

Z dwóch ostatnich twierdzeń wynika

T′17. $X \neq \Phi \Longrightarrow CnX = Cn^{*}KX$.

Funkcja Cn może być więc zdefiniowana przy pomocy funkcji $Cn^{*}$, która jak wiemy jest addytywna i spełnia aksjomaty ogólnej teorii systemów Tarskiego. Fakt ten odegra podstawową rolę w dowodach aksjomatów ogólnej teorii systemów Tarskiego na gruncie teorii T′.

## § 2. Równoważność teorii T i T′

W paragrafie tym udowodnimy, że aksjomaty i definicje teorii T są aksjomatami, definicjami lub twierdzeniami teorii T′ i odwrotnie: aksjomaty i definicje teorii T′ są aksjomatami, definicjami lub twierdzeniami teorii T.

Wspólnymi aksjomatami obu teorii są wyrażenia:

$$\bar{\bar{S}} = \aleph_0,$$

$$x, y \in S \Longrightarrow nx, cxy \in S,$$

$$nx = ny \Longrightarrow x = y.$$

Jedyną definicją teorii T, która nie jest definicją teorii $T'$ jest określenie zbioru zdań odrzuconych. Jedyną zaś definicją teorii $T'$, która nie jest definicją teorii T, jest definicja zbioru konsekwencji. Należy więc wykazać, że twierdzeniami teorii T są: definicja $D'8$ oraz aksjomaty $A'3$ - $A'11$, zaś twierdzeniami teorii $T'$ są: definicja D1 oraz aksjomaty $A2_T$ - $A8_T$ teorii T. Zauważmy, że definicja $D'8$ oraz aksjomaty $A'3$ - $A'11$ zostały już w teorii T udowodnione (zob. twierdzenia rozdziału I: T25b, T27c, T49, T52a, T57 - T60 oraz wzór $(\alpha)$ § 2 rozdziału II). Tak więc teoria $T'$ zawiera się w teorii T.

Przystąpimy teraz do dowodu inkluzji odwrotnej. Z twierdzeń $T'11$a, b - $T'5$c, d i $T'16$ wynikają następujące dwa twierdzenia

$T'18.$ $X \subset CnX \subset S,$

$T'19.$ $X \subset Y \Longrightarrow CnX \subset CnY.$

Dowody dwóch następnych aksjomatów ogólnej teorii systemów Tarskiego przeprowadzimy bardziej szczegółowo.

$T'20.$ $CnCnX \subset CnX$

W dowodzie tego twierdzenia rozważymy dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że $X = \Phi$. W myśl $T'5$b i $T'14$ zachodzi wzór

$$KCn^{*}\{cxx\} \subset Cn^{*}\{cxx\}. \tag{1}$$

Ze wzoru tego oraz monotoniczności i idempotentności funkcji $Cn^{*}$ wynika, że

$$Cn^{*}KCn^{*}\{cxx\} \subset Cn^{*}\{cxx\}. \tag{2}$$

W myśl $T'13$ zbiór $Cn^{*}\{cxx\}$ jest zbiorem niepustym. Stąd i wobec (2) oraz $T'17$ otrzymujemy

$$CnCn^{*}\{cxx\} \subset Cn^{*}\{cxx\}. \tag{3}$$

Zbiór $Cn^{*}\{cxx\}$ jest jednak identyczny ze zbiorem $CnX$, co wynika z założenia, że $X$ jest zbiorem pustym oraz z twierdzeń $T'5a$ i $T'16$. Z wniosku tego wynika już łatwo prawdziwość dowodzonego twierdzenia w przypadku gdy $X = \Phi$.
Załóżmy teraz, że $X \neq \Phi$. Z twierdzenia $T'5a$ wynika więc, że

$$KX \neq \Phi. \tag{4}$$

Z $T'11b$, c oraz $T'14$ wynika, że

$$Cn^{*}KCn^{*}KX \subset Cn^{*}KX. \tag{5}$$

Ze wzoru (4) oraz $T'13$ i $T'17$ wynika prawdziwość twierdzenia w drugim z możliwych przypadków.

$T'21.$ $x \in CnX \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} \overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in CnY).$

D o w ó d. W przypadku gdy $X$ jest zbiorem pustym twierdzenie jest oczywiście prawdziwe. Załóżmy więc, że $X$ jest zbiorem niepustym. Wtedy z założenia twierdzenia i $T'17$ wynika, że

$$x \in Cn^{*}KX. \tag{1}$$

Z $T'11d$ wynika istnienie takiego zdania $y$, że

$$y \in KX, \tag{2}$$

$$x \in Cn^{*}\{y\}. \tag{3}$$

Ze wzoru (2) i $D'6$ wynika istnienie takich zdań $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \in X, \tag{4}$$

$$y = k(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{5}$$

Stąd i z $D'6$ wynika, że

$$y \in K\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{6}$$

Ze wzorów (3) i (6) oraz $T'11b$ otrzymujemy

$$x \in Cn^{*}K\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{7}$$

Stąd i wobec $T'17$ otrzymujemy, że

$$x \in Cn\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{8}$$

Ze wzorów (4) i (8) wynika teza twierdzenia.

Udowodnimy teraz trzy pozostałe aksjomaty teorii $T$ nie będące aksjomatami ogólnej teorii Tarskiego.

$T'22.$ $cxy \in CnX \Longrightarrow y \in Cn(X \cup \{x\}).$

D o w ó d. Z założenia twierdzenia i $D'8$ wynika, że

$$cxy \in NCn'N(KX \cup \{cxx\}). \tag{1}$$

Stąd i $D'2$ oraz $A'6$ wynika, że

$$ncxy \in Cn'N(KX \cup \{cxx\}). \tag{2}$$

Z (2), $T'4b$ oraz $T'3f$ i $T'2$ wynika, że

$$k(x,ny) \in Cn'NKX \cup Cn'N\{cxx\}. \tag{3}$$

Stąd, z $A'9$ i $T'8$ wynika, że

$$k(x,ny) \in Cn'ANX \cup Cn'\{ncxx\} \cup Cn'\{nx\}. \tag{4}$$

Ze wzoru (4), z $A'5$ i $T'2$ wynika z kolei, że

$$k(x,ny) \in Cn'(ANX \cup \{nx\}). \tag{5}$$

Korzystając teraz z $A'10$ otrzymujemy

$$ny \in Cn'A(ANX \cup \{nx\}). \tag{6}$$

Zgodnie z $T'3d$ oraz $T'5e$, f prawdziwa jest inkluzja

$$ANX \cup \{nx\} \subset A(NX \cup N\{x\}). \tag{7}$$

Ze wzorów więc (6) i (7) oraz $T'5f$ i $T'1b$ wynika, że

$$ny \in Cn'AA(NX \cup N\{x\}). \tag{8}$$

Stąd, z $A'6$, $A'8$ oraz $T'3f$ wynika, że

$$ny \in Cn'AN(X \cup \{x\}). \tag{9}$$

a więc zgodnie z $D'2$ i $A'9$

$$y \in NCn'NK(X \cup \{x\}). \tag{10}$$

Stąd już, z $D'7$ i $T'17$ wynika teza dowodzonego twierdzenia.

$T'23.$ $y \in Cn(X \cup \{x\}) \Longrightarrow cxy \in CnX$

D o w ó d. Z założenia twierdzenia, $D'7$ oraz z $T'17$ otrzymujemy, że

$$y \in NCn'NK(X \cup \{x\}). \tag{1}$$

Z $D'2$ i $A'9$ wynika dalej, że

$$\neg y \in Cn'AN(X \cup \{x\}). \tag{2}$$

Stąd i z $A'6$ oraz $T'3f$ otrzymujemy

$$ny \in Cn'A(NX \cup N\{x\}). \tag{3}$$

Ze wzoru (3) oraz $A'11$ wynika, że

$$k(x,ny) \in Cn'(ANX \cup \{ncxx\}). \tag{4}$$

Stąd i korzystająo z $T'2$, $A'9$, $T'8$ oraz raz jeszcze z $T'2$ otrzymamy, że

$$k(x,ny) \in Cn'(NKX \cup N\{cxx\}). \tag{5}$$

Z (5) i $T'4b$ oraz $A'6$ wynika, że

$$\neg cxy \in Cn'(NKX \cup N\{cxx\}). \tag{6}$$

Stąd, z $D'2$ i $T'3f$ otrzymujemy

$$cxy \in NCn'N(KX \cup \{cxx\}). \tag{7}$$

Ze wzoru (7) i $D'8$ wynika teza dowodzonego twierdzenia.

$T'24.$ $Cn\{x, nx\} = S$

D o w ó d. Z $D'6$ oraz twierdzeń $T'3c$ i $T'1b$ wynika, że

$$Cn'\{nk(x, nx)\} \subset Cn'NK\{x, nx\}. \qquad (1)$$

Stąd i z $T'3h$ otrzymujemy

$$NCn'\{nk(x, nx)\} \subset NCn'NK\{x, nx\}. \qquad (2)$$

Ze wzoru (2), $D'7$ oraz twierdzeń $T'17$ i $T'9$ wnioskujemy, że

$$NS \subset Cn\{x, nx\}. \qquad (3)$$

Udowodnimy teraz następującą inkluzję

$$S \subset NS \qquad (4)$$

W tym celu załóżmy, że $x \in S$. Z $A'2$ i $T'1a$ wynika wtedy, że $nx \in Cn'S$, stąd zaś na podstawie $A'6$ i $D'2$ otrzymujemy, że $x \in NCn'S$. Wobec oczywistej równości $Cn'S = S$ zdanie $x$ należy do $NS$. Wzór (4) jest więc prawdziwy.

Ze wzorów (3), (4) oraz $T'18$ wynika twierdzenie.

$T'25.$ $Cn\{x\} \cap Cn\{nx\} = Cn\Phi.$

D o w ó d. Z $D'8$ oraz $T'5a$ wynika równość

$$Cn\Phi = NCn'N\{cxx\}. \qquad (1)$$

Z $T'8$ oraz $A'5$ wynika równość

$$NCn'N\{cxx\} = N(Cn'\{x\} \cap Cn'\{nx\}). \qquad (2)$$

Z twierdzeń $T'3g$, $T'7$ i $T'8$ wynika kolejna równość

$$N(Cn'\{x\} \cap Cn'\{nx\}) = NCn'N\{nx\} \cap NCn'N\{x\}. \tag{3}$$

Na podstawie $T'5b$, $D'7$ i $T'17$ otrzymujemy

$$NCn'N\{nx\} \cap NCn'N\{x\} = Cn\{x\} \cap Cn\{nx\}. \tag{4}$$

Wobec równości (1) - (4) zbiory $Cn\,\Phi$ i $Cn\{x\} \cap Cn\{nx\}$ są identyczne, co kończy dowód twierdzenia.

Stąd, że wyrażenia $T'18$ - $T'25$ są twierdzeniami teorii $T'$ wynika, że każdy aksjomat teorii $T$ nie będący aksjomatem teorii $T'$ jest jej twierdzeniem.

Pozostało jeszcze do udowodnienia, że definicja zbioru zdań odczuconych dołączona do aksjomatów teorii $T$ jest twierdzeniem teorii $T'$.

$T'26.$ $\quad y \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\}$

D o w ó d. Z $A'4$ i $A'6$ oraz $T'8$ wynika równoważność

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow \neg x \in Cn'N\{y\}. \tag{1}$$

Stąd, z $D'2$ oraz $T'5b$ otrzymujemy

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow x \in NCn'NK\{y\}. \tag{2}$$

Ze wzoru (2), z $D'7$ oraz $T'17$ wynika równoważność

$$y \in Cn'\{x\} \Longleftrightarrow x \in Cn\{y\}. \tag{3}$$

Stąd i z $T'1e$ wynika dowodzone twierdzenie.

Wykazaliśmy w ten sposób, że teoria $T$ zawiera się w teorii $T'$. Wcześniej wykazaliśmy, że zachodzi również zawieranie się odwrotne. Teorie $T$ i $T'$ są więc równoważne.

## R o z d z i a ł IV

### ZDANIA EMPIRYCZNE

W rozdziale tym, jak to zapowiedzieliśmy we Wstępie, zostanie dokonana próba zastosowania do metodologii nauk empirycznych poprzednio wprowadzonych pojęć. Zostaną też wprowadzone nowe pojęcia, najistotniejszym wśród nich jest pojęcie zdania empirycznego. Przez zdania empiryczne rozumieć będziemy zdania o pewnej budowie, nie wchodząc jednak dokładnie w ich strukturę. Zakładamy, że są to zdania, w których nie występują terminy logiczne, w szczególności nie są to negacje jakichkolwiek zdań. Przyjmujemy również, że w każdym zdaniu empirycznym jest zdeterminowane miejsce i czas pewnego zdarzenia. Zdaniami empirycznymi są więc zdania typu

Dziś w Krakowie pada deszcz,

Jutro we Wrocławiu będzie pochmurno.

Nie będzie nas interesowało zagadnienie, czy zdania te dotyczą obiektywnej rzeczywistości, czy naszych subiektywnych wrażeń i w jaki sposób są uzasadniane. Interesuje nas tylko rola jaką grają one w rozumowaniach nauk empirycznych, stosunki logiczne pomiędzy tymi zdaniami, związki wynikania łączące je z innymi zdaniami teorii empirycznych. W ten sposób chcemy wyjaśnić, chociażby w małym bardzo stopniu strukturę nauk empirycznych. O niej mówi Łukasiewicz w artykule "O twórczości w nauce"[11]:

[11] Artykuł ten ukazał się nakładem Biblioteki Filozoficznej, Lwów 1934, jak również w "Poradniku dla samouków", t. 1, W-wa 1915, pt. "O nauce".

"Celem nauki jest budowa syntez zaspokajających ogólnoludzkie potrzeby intelektualne. W skład tych syntez wchodzą sądy prawdziwe o faktach: one głównie wzbudzają potrzeby intelektualne. To są elementy rekonstrukcyjne. Ale do syntez należą i sądy twórcze: one zaspokajają potrzeby intelektualne. To są elementy konstrukcyjne. Elementy jedne i drugie jednoczą się w całości dzięki logicznym stosunkom wynikania. Stosunki te syntezom sądów nadają charakter naukowy.

Twórczość poetycka nie różni się od naukowej większym polotem fantazji (...). Uczony tym jednak różni się od poety, że zawsze i wszędzie musi rozumować. Nie wszystko musi i może uzasadnić, ale cokolwiek głosi, musi węzłami logicznymi powiązać w ścisłą całość. Na dnie tej całości leżą sądy o faktach, nad nimi wznosi się teoria, która fakty tłumaczy, porządkuje, przepowiada".

Nie podajemy definicji zbioru wszystkich zdań empirycznych, lecz pojęcie to przyjmujemy jako nowe pojęcie pierwotne teorii T, oznaczając je symbolem $Emp^+$.
Niektóre własności tego pojęcia wyznaczają aksjomaty:

$A1_E$. $\quad nx \notin Emp^+$.

$A2_E$. $\quad X \subset Emp^+ \cup NEmp^+ \wedge \sim \bigvee_{x} x, nx \in X \Longrightarrow X \in Nsp$.

Dla uwydatnienia intuicyjnego sensu aksjomatu $A2_E$ wprowadzimy pewne oznaczenia. Sumę zbiorów $Emp^+$ i $NEmp^+$ oznaczać będziemy symbolem $Emp$ i nazywać zbiorem zdań empirycznych w szerszym znaczeniu. Każdy zaś podzbiór zdań empirycznych w szerszym znaczeniu nie zawierający zdań sprzecznych, nazywać będziemy bazą empiryczną[12]. Rodzinę wszystkich takich zbiorów oznaczać będziemy przez $Emp^*$.

[12] Ze względu na T21 i T22 wyrażenie, że pewien podzbiór Emp nie zawiera zdań sprzecznych jest równoważne wyrażeniu, że podzbiór ten nie zawiera jednocześnie żadnego zdania i jego negacji.

Przyjęte oznaczenia zanotujemy w formie definicji:

$D1_E.$ $Emp = Emp^+ \cup NEmp^+,$

$D2_E.$ $X \in Emp^* \Longleftrightarrow X \subset Emp \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X.$

Posługując się przyjętymi skrótami $A2_E$ możemy zanotować w postaci

$T1_E.$ $Emp^* \subset Nsp.$

Korzystając z $T1_E$, $T11_T$ oraz $A2_T$ definicję $D2_E$ możemy zanotować w postaci następującego twierdzenia

$T1_Ea.$ $X \in Emp^* \Longleftrightarrow X \subset Emp \wedge X \in Nsp.$

Z żadnego więc zbioru zdań empirycznych w szerszym znaczeniu nie zawierającego równocześnie zdania i jego negacji nie może wynikać para zdań, z których jedno jest negacją drugiego i odwrotnie jeśli z pewnego zbioru zdań empirycznych w szerszym znaczeniu nie może wynikać para zdań, z których jedno jest negacją drugiego, to zbiór ten żadnej takiej pary nie zawiera. W $T1_E$ i $T1_Ea$ tkwi intuicja, że zdania empiryczne są dedukcyjnie jak najbardziej jałowe, są możliwie słabe. Tę własność zdań empirycznych potwierdzają niektóre dalsze twierdzenia.

Z aksjomatu $A1_E$ wynika, że żadne zdanie empiryczne nie może rozpoczynać się od negacji. Wykażemy, że negacja zbioru wszystkich zdań empirycznych składa się wyłącznie z negacji zdań empirycznych:

$T2_E.$ $x \in NEmp^+ \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in Emp^+} x = ny$

D o w ó d. Załóżmy najpierw, że $x \in NEmp^{+}$. Wynika stąd, że zdanie $x$ jest negacją jakiegoś zdania, gdyby bowiem było inaczej, na podstawie D9 oraz T22 $nx$ byłoby zdaniem empirycznym, co przeczy $A1_E$.
Przyjmijmy więc, że

$$x = ny_1. \tag{1}$$

Z założenia, że $x \in NEmp^{+}$ oraz na podstawie (1) i T28 wnioskujemy, że

$$y_1 \in Emp^{+}. \tag{2}$$

Wobec (1) i (2) prawdziwy jest wzór

$$\bigvee_{y \in Emp^{+}} x = ny. \tag{3}$$

Załóżmy teraz, że

$$\bigvee_{y \in Emp^{+}} x = ny. \tag{4}$$

Ze wzoru (4) na podstawie T28 wynika, że

$$x \in NEmp^{+}. \tag{5}$$

Twierdzenie $T2_E$ zostało więc udowodnione.
Z $T2_E$ oraz $D1_E$ wynika natychmiast

$T3_E$. $\quad x \in Emp \Longleftrightarrow x \in Emp^{+} \vee \bigvee_{y \in Emp^{+}} x = ny$

W myśl $T3_E$ do zbioru wszystkich zdań empirycznych w szerszym znaczeniu należą wszystkie zdania empiryczne i wszystkie ich negacje. $T3_E$ mogłoby służyć za definicję zbioru wszystkich zdań empirycznych w szerszym znaczeniu.

Z $T3_E$, $A10_T$ oraz $A1_E$ wnioskujemy, że

$T4_E$. $nnx \notin Emp$

Do zbioru Emp należą więc np. zdania

Dziś we Wrocławiu było słonecznie,

Dziś w Warszawie nie pada śnieg,

nie należy natomiast np. zdanie

Nieprawda, że dziś w Paryżu nie świeci słońce.

Z $T3_E$, $A1_E$ oraz T21 i T22 łatwo wynika

$T5_E$. $x \in Emp \Longrightarrow \neg x \in Emp$.

Zdanie sprzeczne ze zdaniem empirycznym w szerszym znaczeniu jest więc zdaniem empirycznym w szerszym znaczeniu. Twierdzenie odwrotne do $T5_E$ nie jest prawdziwe.

Podamy teraz twierdzenie, które może służyć za definicję bazy empirycznej[13].

$T6_E$. $X \in Emp^* \Longleftrightarrow \bigvee_{Y,Z \subset Emp^+} (X = Y \cup NZ \wedge Y \cap Z = \emptyset)$.

D o w ó d. Załóżmy, że $X \in Emp^*$. Stąd, z $D1_E$ i $D2_E$ wynika, że

$$X \subset Emp^+ \cup NEmp^+, \tag{1}$$

[13] Twierdzenie to zostało sformułowane i udowodnione przez G. Brylla. Podajemy je za uprzejmą zgodą autora.

$$\sim \bigvee_{x} x, nx \in X. \tag{2}$$

Ze wzoru (1) wynika, że

$$X = X \cap Emp^{+} \cup X \cap NEmp^{+}. \tag{3}$$

Prawdziwe są również następujące dwa wzory

$$X \cap Emp^{+} \subset Emp^{+}, \tag{4}$$

$$X \cap NEmp^{+} \subset NEmp^{+}. \tag{5}$$

Z $T2_E$ i T28 wynika jednak, że każdy podzbiór negacji zbioru wszystkich zdań empirycznych jest negacją pewnego podzbioru zbioru wszystkich zdań empirycznych. Wobec (5) istnieje zatem taki zbiór $Z_1$, że

$$X \cap NEmp^{+} = NZ_1, \tag{6}$$

$$Z_1 \subset Emp^{+}. \tag{7}$$

Wykażemy, że zbiory $X \cap Emp^{+}$ i $Z_1$ są rozłączne. Gdyby tak nie było, to na podstawie T28 i (6) do zbioru $X$ należałoby jakieś zdanie i jego negacja, co przeczy (2). Mamy zatem

$$(X \cap Emp^{+}) \cap Z_1 = \emptyset. \tag{8}$$

Tak więc na podstawie wzorów (3), (4), (6), (7) oraz (8) otrzymujemy wzór

$$\bigvee_{Y,Z \subset Emp^{+}} (X = Y \cup NZ \wedge Y \cap Z = \emptyset). \tag{9}$$

Załóżmy teraz, że prawdziwy jest wzór (9). Stąd na podstawie T33 i $D1_E$ wynika, że

$$X \subset Emp, \tag{10}$$

zaś na podstawie $A1_E$, T28, T33 i $T2_E$ wynika, że

$$\sim \bigvee_{x} x, \neg x \in X. \tag{11}$$

Ze wzorów (10) i (11) na podstawie $D2_E$ otrzymujemy, że $X \in Emp^*$. Kończy to dowód twierdzenia.

Podajemy kilka przykładów zbiorów, które są bazami empirycznymi. Jak wnioskujemy z $A1_E$ i $T2_E$ są nimi przede wszystkim zbiór wszystkich zdań empirycznych i jego negacja. Wniosek ten zapiszmy przy pomocy wzoru

$T7_E$. $Emp^+, NEmp^+ \in Emp^*$.

Z $T5_E$ oraz z T21 i T22 wynika, że bazami empirycznymi będą też zbiory otrzymane z pewnej bazy empirycznej przez wyjęcie z niej dowolnej liczby zdań i przez zastąpienie tych zdań zdaniami z nimi sprzecznymi.
Zanotujemy w postaci wzorów tylko te dwa szczególne przypadki tego twierdzenia, z których dalej skorzystamy.

$T8_E$a. $X \in Emp^* \wedge x \in X \Longrightarrow X \setminus \{x\} \cup \{\neg x\} \in Emp^*$,

b. $X \in Emp^* \wedge x, y \in X \Longrightarrow X \setminus \{x, y\} \cup \{\neg x, \neg y\} \in Emp^*$.

Zauważmy, że zbiór powstały z pewnej bazy empirycznej przez wyjęcie pewnego jej podzbioru i dołączenie jego negacji nie musi być bazą empiryczną. W powstałym zbiorze mogłyby bowiem znajdować się podwójne negacje zdań empirycznych, co w myśl $D2_E$ przeczy $T4_E$.

Z $A1_E$, D9, D8, $T2_E$ i $D2_E$ wynika jednak prawdziwość twierdzenia

$T8_E$. $X \subset Emp^{+} \wedge Y \subset X \Longrightarrow X \setminus Y \cup NY \in Emp^{*}$.

Podamy teraz kilka twierdzeń wskazujących na dedukcyjną słabość zdań empirycznych.

$T9_E$. $Emp^{*} \in Nsp'$

Podajemy dowód $T9_E$. W tym celu zapiszmy $T9_E$ w postaci

$$X \in Emp^{*} \Longrightarrow X \in Nsp'.$$

Załóżmy niewprost, że $X \notin Nsp'$. Stąd i z D6 wynika istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1, nx_1 \in Cn'X. \tag{1}$$

Z (1) oraz T1b wynika istnienie takich zdań $x_2$ i $x_3$, że

$$x_2, x_3 \in X, \tag{2}$$

$$cx_1x_2, cnx_1x_3 \in Cn\Phi. \tag{3}$$

Elementami zbioru $Cn\Phi$ na podstawie Uwag 1 i 2 (zob. Wstęp oraz § 3, rozdz. I) są zdania $ccx_1x_2c\urcorner x_2nx_1$, $ccnx_1x_3c\urcorner x_3x_1$. Stąd, z (3) i $T13_T$ wynika, że

$$c\urcorner x_2nx_1,\ c\urcorner x_3x_1 \in Cn\Phi. \tag{4}$$

Z (4) i $A6_T$ wnioskujemy dalej, że

$$nx_1 \in Cn\{\neg x_2\}, \tag{5}$$

$$x_1 \in Cn\{\neg x_3\}. \tag{6}$$

Ze wzorów (5), (6) i (2) oraz $A3_T$ wynika, że

$$x_1, nx_1 \in Cn(X \setminus \{x_2, x_3\} \cup \{\neg x_2, \neg x_3\}). \tag{7}$$

Z założenia, że $X \in Emp^*$, z (2), $T8_Eb$ i $T1_E$ wynika, że

$$X \setminus \{x_2, x_3\} \cup \{\neg x_2, \neg x_3\} \in Nsp. \tag{8}$$

Wzory (7) i (8) są na podstawie $T11_T$ sprzeczne. Wniosek ten kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenia $T1_E$ i $T9_E$ można połączyć w jedno zdanie: Jeśli do pewnego zbioru zdań empirycznych w szerszym znaczeniu nie należy para zdań sprzecznych, to na postawie zdań tego zbioru nie da się wyprowadzić ani odrzucić żadna para takich zdań.

$T10_E$. $Emp^* \subset Nzl$

D o w ó d. Zapiszmy $T10_E$ w postaci

$$X \in Emp^* \Longrightarrow X \in Nzl.$$

Z założenia twierdzenia oraz $T8_Ea$ i $T1_E$ wynika, że

$$\bigwedge_{x \in X} X \setminus \{x\} \cup \{\neg x\} \in Nsp. \tag{1}$$

Z $A2_T$, $A3_T$, $A4_T$ oraz T25a łatwo wynika, że zbiory $Cn(Y \cup \{nx\})$ i $Cn(Y \cup \{\neg x\})$ są równe. Stąd, z (1) i $D5_T$ wynika, że

$$\bigwedge_{x \in X} X \setminus \{x\} \cup \{nx\} \in Nsp. \tag{2}$$

Z (2) i $T10_T$ wynika, że $X \in Nzl$. Wniosek ten kończy dowód twierdzenia.

W myśl $T10_E$ żadne zdanie pewnej bazy empirycznej nie może wynikać z pozostałych zdań bazy.

Zauważmy, że przy założeniu nieskończoności zbioru wszystkich zdań empirycznych aksjomat $A2_E$ lub równoważne z nim $T1_E$ można zastąpić wyrażeniem $Emp^* \subset Nzl$. Prawdziwe jest bowiem wyrażenie

$$(\psi) \quad X \in Emp^* \land Emp^* \subset Nzl \land \overline{\overline{Emp^+}} = \aleph_0 \Longrightarrow X \in Nsp.$$

W dowodzie niewprost wyrażenia $(\psi)$ skorzystamy z $T6_E$ i $T8_E$. Dowody tych twierdzeń nie są jednak oparte na $A2_E$. Załóżmy, że $X \notin Nsp$. Stąd na podstawie $T3_T$ wynika istnienie takiego zbioru $X_1$, że

$$X_1 \subset X, \tag{1}$$

$$\overline{\overline{X_1}} < \aleph_0, \tag{2}$$

$$X_1 \notin Nsp. \tag{3}$$

Z założenia, że $X \in Emp^*$ oraz $T6_E$ wynika istnienie takich zbiorów $Y_1$ i $Z_1$, że

$$Y_1, Z_1 \subset Emp^+, \tag{4}$$

$$X = Y_1 \cup NZ_1 \land Y_1 \cap Z_1 = \emptyset. \tag{5}$$

Z (4) i $T8_E$c wynika, że

$$X_2 = Emp^+ \setminus Z_1 \cup NZ_1 \in Emp^*. \tag{6}$$

Z założenia twierdzenia, że $\mathrm{Emp}^{*} \subset \mathrm{Nzl}$ i (6) wynika, że

$$X_2 \in \mathrm{Nzl}. \tag{7}$$

Zauważmy, że z $A1_E$, D9, D8, T28 i T21 wynika równoliczność zbiorów $Z_1$ i $NZ_1$. Stąd, z założenia twierdzenia, że $\overline{\overline{\mathrm{Emp}}}^{+} = \aleph_0$ i ze wzoru (6) wynika, że

$$\overline{\overline{X}}_2 = \aleph_0. \tag{8}$$

Z (4), (5) i (6) otrzymujemy, że

$$X \subset X_2, \tag{9}$$

stąd zaś, z (1), (2) i (8) wynika dalej, że

$$X_1 \subsetneqq X_2, \tag{10}$$

co pozwala wnioskować o istnieniu takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X_2, \tag{11}$$

$$x_1 \notin X_1. \tag{12}$$

Z (10) i (11) otrzymujemy

$$X_1 \cup \{x_1\} \subset X_2. \tag{13}$$

Ze wzorów (7) i (13) na podstawie $T7_T$ wnioskujemy, że

$$X_1 \cup \{x_1\} \in \mathrm{Nzl}. \tag{14}$$

z (3), (12) i $T2_T$ wynika jednak, że

$$X_1 \cup \{x_1\} \setminus \{x_1\} \cup \{nx_1\} \notin Nsp, \tag{15}$$

a więc na podstawie $T10_T$

$$X_1 \cup \{x_1\} \notin Nzl. \tag{16}$$

Wzory (14) i (16) są sprzeczne. Wniosek ten kończy dowód wyrażenia ($\psi$).

$T11_E$. $Emp^* \subset Nzl'$

Twierdzenie to wynika natychmiast z $T10_E$ oraz T13.

W myśl $T11_E$ żadne zdanie bazy empirycznej nie może być odrzucone na podstawie pozostałych zdań tej bazy.

Twierdzenia $T10_E$ i $T11_E$ można połączyć w jedno zdanie: Jeśli z pewnego zbioru X, do którego nie należy para zdań sprzecznych, a którego elementami są tylko zdania empiryczne względnie ich negacje, wyjmiemy jakieś zdanie, to na podstawie pozostałych zdań zbioru X zdania tego nie można ani wyprowadzić ani odrzucić.

Wykażemy teraz, że jeśli z pewnego zbioru $Y \subset Emp$, do którego nie należy para sprzecznych zdań, wyjmiemy jakieś zdanie, to zdanie z nim sprzeczne nie może być wyprowadzone, ani odrzucone na podstawie pozostałych zdań zbioru Y.

$T12_E$. $X \in Emp^* \wedge x \in X \Longrightarrow \neg x \notin Cn(X \setminus \{x\})$.

D o w ó d. Załóżmy niewprost, że

$$\neg x \in Cn(X \setminus \{x\}). \tag{1}$$

Z pierwszego założenia twierdzenia oraz $T1_E$ wynika, że

$$X \subset Nsp. \tag{2}$$

Z (1) i drugiego założenia twierdzenia oraz $A2_T$ i $A3_T$ otrzymujemy, że $x, \neg x \in CnX$, co wobec $T11_T$ i T25a przeczy wzorowi (2). Dowód $T12_E$ jest więc zakończony.

$T13_E$. $X \in Emp^{*} \wedge x \in X \Longrightarrow \neg x \notin Cn'(X \setminus \{x\})$.

Dowód $T13_E$ przebiega analogicznie do dowodu $T12_E$. Opieramy się w nim na $T9_E$, $D6_T$ oraz T3a, b.

Udowodnimy z kolei, że żadne zdanie empiryczne w szerszym znaczeniu nie jest tezą klasycznego rachunku zdań, ani jego kontrtezą.

$T14_E$. $x \in Emp \Longrightarrow x \notin Cn\,\Phi \cup NCn\,\Phi$.

D o w ó d. Z twierdzeń $T7_E$ i $T9_E$ wynika, że zbiory $Emp^{+}$ i $NEmp^{+}$ są niesprzeczne ze względu na odrzucanie. Zbiory $Cn'Emp^{+}$ i $Cn'NEmp^{+}$ są więc w myśl T16 podzbiorami właściwymi zbioru S. Pozwala to na podstawie T10 wnioskować dalej, że zbiory $Emp^{+}$ i $NEmp^{+}$ nie mają wspólnych zdań ze zbiorem $Cn\,\Phi$. Zgodnie więc z $D1_E$ zachodzi wzór

$$Emp \cap Cn\,\Phi = \Phi. \tag{1}$$

Wystarczy zatem udowodnić, że

$$Emp \cap NCn\Phi = \Phi. \tag{2}$$

Przyjmijmy w tym celu, że elementem zbioru $NCn\,\Phi$ jest zdanie $x$. Stąd i z D9 otrzymamy, że $\neg x \in Cn\,\Phi$, a więc w myśl (1) $\neg x \notin Emp$. Stąd i z $T5_E$ wnioskujemy, że $x \notin Emp$. Zbiory $NCn\,\Phi$ i Emp są zatem rozłączne.

Z $T14_E$ i $D2_E$ wynika natychmiast

$$T14_E a. \quad X \in Emp^* \wedge x \in X \Longrightarrow x \notin Cn\,\emptyset \cup NCn\,\emptyset.$$

Żadne więc zdanie bazy empirycznej nie jest tezą klasycznego rachunku zdań, ani jego kontrtezą.

Podamy teraz trzy twierdzenia, z których pierwsze jest w pewnym sensie twierdzeniem o niesprzeczności baz empirycznych, dwa pozostałe natomiast są w pewnym sensie twierdzeniami o niezależności baz empirycznych.

$$T15_E. \quad X \in Emp^* \Longrightarrow CnX \cap Cn'NX = \emptyset.$$

Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z $T1_E$ i T39. Mówi ono, że żadne zdanie nie może być wyprowadzone na podstawie zdań pewnej bazy empirycznej i równocześnie odrzucone na podstawie zdań sprzecznych z jej elementami.

Zilustrujemy to twierdzenie przykładem. Niech $X$ jest zbiorem zdań potwierdzonych przez doświadczenie. Zbiór $NX$ jest wtedy zbiorem zdań sprzecznych z doświadczeniem. Na podstawie zbioru $CnX$ otrzymać możemy więc tylko zdania prawdziwe, zaś na podstawie zbioru $Cn'NX$ tylko zdania fałszywe. Zbiory $CnX$ i $Cn'NX$ nie mogą więc posiadać wspólnych elementów.

$$T16_E. \quad X \in Emp^* \Longrightarrow CnX \cap Emp = X.$$ [14]

D o w ó d. Na podstawie założenia twierdzenia oraz na podstawie $A2_T$ i $D2_E$ otrzymujemy natychmiast inkluzję

$$X \subset CnX \cap Emp. \tag{1}$$

[14] Twierdzenie $T16_E$ zostało sformułowane i udowodnione przez G. Brylla. Podajemy je za uprzejmą zgodną Autora.

Pozostało zatem do wykazania, że $CnX \cap Emp \subset X$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wynika stąd istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in CnX, \tag{2}$$

$$x_1 \in Emp, \tag{3}$$

$$x_1 \notin X. \tag{4}$$

Ze wzoru (2) oraz aksjomatów $A2_T$, $A3_T$, $A4_T$ wynika, że

$$Cn(X \cup \{x_1\}) = CnX. \tag{5}$$

Stąd, z założenia twierdzenia, $D5_T$ i $T1_E$ otrzymujemy, że

$$X \cup \{x_1\} \in Nsp. \tag{6}$$

Ze wzorów zaś (1) i (3) otrzymujemy, że

$$X \cup \{x_1\} \subset Emp. \tag{7}$$

Z (6), (7) i $T1_E$a wnioskujemy, że

$$X \cup \{x_1\} \in Emp^*. \tag{8}$$

Stąd i z $T10_E$ wynika więc, że

$$X \cup \{x_1\} \in Nzl. \tag{9}$$

Z (4) otrzymujemy jednak, że

$$X \cup \{x_1\} \setminus \{x_1\} = X. \tag{10}$$

Na podstawie więc (2)

$$x_1 \in Cn(X \cup \{x_1\} \setminus \{x_1\}). \tag{11}$$

Z (11) i $D4_T$ wynika

$$X \cup \{x_1\} \notin Nzl. \tag{12}$$

Wzory (9) i (12) są sprzeczne, co kończy dowód twierdzenia.

$T17_E$. $X \in Emp^* \Longrightarrow Cn'X \cap Emp = X.$

Dowód $T17_E$ przebiega analogicznie do dowodu $T16_E$. Opieramy się w nim na T3a, b, c, $T9_E$, T8, D6, $T11_E$ i D5.

W myśl dwóch ostatnich twierdzeń na podstawie pewnej bazy empirycznej możemy wyprowadzić lub odrzucić te i tylko te zdania empiryczne w szerszym znaczeniu, które należą do tej bazy. Wiemy, że każdy podzbiór zbioru wszystkich zdań empirycznych i każdy podzbiór negacji zbioru wszystkich zdań empirycznych jest bazą empiryczną. Tak więc na podstawie pewnego zbioru zdań empirycznych, w myśl $T16_E$ i $T17_E$ nie możemy wyprowadzić, ani odrzucić żadnego zdania będącego negacją zdania empirycznego, zaś na podstawie negacji pewnego zbioru zdań empirycznych nie możemy wyprowadzić ani odrzucić żadnego zdania empirycznego.

Podamy teraz kilka dalszych własności baz empirycznych. Wystąpią w nich te terminy zdefiniowane, których nie spotykaliśmy w poprzednich twierdzeniach opisujących własności baz empirycznych.

$T18_E$. $X, Y \in Emp^* \wedge X \approx Y \Longrightarrow X = Y,$

$T19_E$. $X, Y \in Emp^* \wedge X \approx' Y \Longrightarrow X = Y.$

$T18_E$ i $T19_E$ są łatwymi wnioskami odpowiednio z $T16_E$ i $D2_T$ oraz z $T17_E$ i D3. W myśl tych twierdzeń każde dwie bazy empiryczne równoważne ze względu na wyprowadzalność lub odrzucanie są równe.

$T20_E$. $Y \subset X \in Emp^* \wedge Y \in Zpł \Longrightarrow X = Y$.

$T21_E$. $Y \subset X \in Emp^* \wedge Y \in Zpł' \Longrightarrow X = Y$.

Twierdzenie $T20_E$ wynika łatwo z $T1_E$, $T5_T$, $T18_E$ oraz uwagi będącej bezpośrednim wnioskiem z $D2_E$, że każdy podzbiór bazy empirycznej jest bazą empiryczną.

Podajemy dowód $T21_E$. W tym celu załóżmy niewprost, że zbiory X i Y są różne. Stąd z założenia twierdzenia, z D7, $T11_E$ i $T9_E$ otrzymujemy, że

$$Y \subsetneq X, \tag{1}$$

$$\bigwedge_x (x \in Cn'Y \cup nx \in Cn'Y), \tag{2}$$

$$X \in Nzl', \tag{3}$$

$$X \in Nsp'. \tag{4}$$

Ze wzoru (1) i T3b wynika istnienie takiego zdania $x_1$, że

$$x_1 \in X, \tag{5}$$

$$x_1 \notin Y, \tag{6}$$

$$Cn'Y \subset Cn'(X \setminus \{x_1\}). \tag{7}$$

Z (5) i T3a otrzymujemy zaś, że

$$x_1 \in Cn'X, \tag{8}$$

Ze wzorów (3) i (5) oraz D5 wynika jednak, że

$$x_1 \notin Cn'(X \setminus \{x_1\}). \tag{9}$$

W myśl więc wzoru (7)

$$x_1 \notin Cn'Y. \tag{10}$$

Stąd, z (2), (1) i T3b otrzymujemy, że

$$nx_1 \in Cn'X. \tag{11}$$

Wzory (8) i (11) są na podstawie D6 sprzeczne z (4), co kończy uzasadnianie twierdzenia.

Z dwóch ostatnich twierdzeń wynika, że żadna baza empiryczna będąca częścią właściwą innej bazy nie może być zbiorem zupełnym ani ze względu na wyprowadzalność, ani ze względu na odrzucanie.

Z $T10_E$ i $T9_T$ wynika natychmiast twierdzenie

$T22_E$. $X \in Emp^* \wedge \bar{\bar{\bar{X}}} = \aleph_0 \Longrightarrow X \notin Aks.$

Z $T9_T$ i TI wobec $T11_E$ wynika natychmiast

$T23_E$. $X \in Emp^* \wedge \bar{\bar{\bar{X}}} = \aleph_0 \Longrightarrow X \notin Aks'.$

W myśl dwóch ostatnich twierdzeń żadna nieskończona baza empiryczna nie jest zbiorem aksjomatyzowanym, ani zbiorem aksjomatyzowalnym ze względu na odrzucanie.

Z T45 i $T1_E$ wynika natychmiast twierdzenie

$T24_E$. $X \in Emp^{*} \Longrightarrow \bigvee_{Y} (NX \subset Y \wedge Y \in Syst' \cap Nsp' \cap Zpł')$.

Sens intuicyjny tego twierdzenia podaliśmy przy omawianiu T45.

## Dodatek

Podajemy tu dowody większości nieudowodnionych w tekście twierdzeń teorii zdań odrzuconych. Będą to mianowicie dowody wszystkich tych twierdzeń teorii T, których numery zaopatrzyliśmy w znak "*".

Dowody, które przeprowadzimy, oparte będą na regułach sformułowanych w pracy [9].

T3a. $X \subset Cn'X \subset S.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dowód. | 1.1. | $x \in X$ | (z.dow.) |
| | 1.2. | $x \in Cn\{x\}$ | ($A2_T$) |
| | 1.3. | $x \in Cn'X$ | (1.1, 1.2, D1) |
| | | $X \in Cn'X \subset S$ | (1.1→1.3, D1) |

T3b. $X \subset Y \Longrightarrow Cn'X \subset Cn'Y.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dowód. | 1. | $X \subset Y$ | (zał.) |
| | 1.1. | $y \in Cn'X$ | (z.dow.) |

1.2. $\bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\}$ (1.1, D1)

1.3. $\bigvee_{x \in Y} x \in Cn\{y\}$ (1.2, 1)

1.4. $y \in Cn'Y$ (1.3, D1)

$Cn'X \subset Cn'Y$ (1.1→1.4)

T3c. $Cn'Cn'X \subset Cn'X.$

Dowód. 1.1. $y \in Cn'Cn'X$ (z.dow.)

1.2. $x_1 \in Cn'X$

1.3. $x_1 \in Cn\{y\}$ } (1.1, D1)

1.4. $x_2 \in X$

1.5. $x_2 \in Cn\{x_1\}$ } (1.2, D1)

1.6. $Cn\{x_1\} \subset Cn\{y\}$ (1.3, $A3_T$, $A4_T$)

1.7. $x_2 \in Cn\{y\}$ (1.5, 1.6)

1.8. $y \in Cn'X$ (1.4, 1.7, D1)

$Cn'Cn'X \subset Cn'X$ (1.1→1.8)

T3d. $x \in Cn'X \Longrightarrow \bigvee_{Y} (Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn'Y).$

Dowód. 1. $x \in Cn'X$ (zał.)

2. $x_1 \in X$

3 $x_1 \in Cn\{x\}$ } (1, D1)

4. $x \in Cn'\{x_1\}$ (3, D1)

5. $\{x_1\} \subset X \wedge \bar{\bar{\{x_1\}}} < \aleph_0$ (2)

$\bigvee_{Y} (Y \subset X \wedge \bar{\bar{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn'Y)$ (4, 5)

T11. $cxy \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn'\{x\} \subset Cn'\{y\}$.

Dowód. 1.1. $cxy \in Cn\emptyset$ (z. dow.)

1.1.1. $z \in Cn'\{x\}$ (z. dow.)

1.1.2. $czx \in Cn\emptyset$ (1.1.1, T1b)

1.1.3. $cczxccxyczy \in Cn\emptyset$ (Uwaga 1)

1.1.4. $czy \in Cn\emptyset$ (1.1.3, 1.1.2, 1.1, $T13_T$)

1.1.5. $z \in Cn'\{y\}$ (1.1.4, T1b)

1.2. $Cn'\{x\} \subset Cn'\{y\}$ (1.1.1 → 1.1.5)

2.1. $Cn'\{x\} \subset Cn'\{y\}$ (z. dow.)

2.2. $x \in Cn'\{y\}$ (2.1, T3a)

2.3. $cxy \in Cn\emptyset$ (2.2, T1b)

$cxy \in Cn\emptyset \Longleftrightarrow Cn'\{x\} \subset Cn'\{y\}$ (1.1 → 1.2, 2.1 → 2.3)

T12. $X \in Syst' \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \notin X} x \notin Cn\{y\}$.

Dla wykazania prawdziwości T12 wystarczy udowodnić następujące dwa lematy:

L A. $X \in \mathrm{Syst}' \wedge x \in X \wedge y \notin X \Longrightarrow x \notin Cn\{y\}$.

L B. $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \notin X} (x \notin Cn\{y\}) \wedge x \in Cn'X \Longrightarrow x \in X$.

Z lematów tych bowiem i D2 wynika twierdzenie.

Podajemy dowód L A.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $X \in \mathrm{Syst}'$ | (zał.) |
| 2. | $x \in X$ | |
| 3. | $y \notin X$ | |
| 4. | $x \in Cn\{y\}$ | (z.d.n.) |
| 5. | $y \in Cn'X$ | (2,4,D1) |
| 6. | $y \in X$ | (5,1,D2) |
| | Sprzeczność | (3,6) |

Podajemy dowód L B.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \notin X} (x \notin Cn\{y\})$ | (zał.) |
| 2. | $x \in Cn'X$ | |
| 3. | $x \notin X$ | (z.d.n.) |
| 4. | $x_1 \in X$ | (2, D1) |
| 5. | $x_1 \in Cn\{x\}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 6. | $x_1 \notin Cn\,\{x\}$ | (4, 3, 1) |
| | Sprzeczność | (5, 6) |

T13. $X \in Nzl \Longrightarrow X \in Nzl'$.

| | | |
|---|---|---|
| Dowód 1. | $X \in Nzl$ | (zał.) |
| 2. | $X \notin Nzl'$ | (z.d.n.) |
| 3. | $x_1 \in X$ | (2, D5) |
| 4. | $x_1 \in Cn'(X \setminus \{x_1\})$ | |
| 5. | $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ | (4, D1) |
| 6. | $x_2 \in Cn\,\{x_1\}$ | |
| 7. | $x_2 \neq x_1 \wedge x_2 \in X$ | (5) |
| 8. | $x_2 \in Cn(X \setminus \{x_2\})$ | (3, 7, $A3_T$, 6) |
| | Sprzeczność | (7, 8, 1, $D4_T$) |

T14. $X \cup Y \in Nzl \Longrightarrow (X \approx Y \Longleftrightarrow X \approx' Y)$.

| | | |
|---|---|---|
| Dowód. 1. | $X \cup Y \in Nzl$ | (zał.) |
| 2. | $X \cup Y \in Nzl'$ | (1, T13) |
| 1.1. | $X \approx Y$ | (z.dow.) |
| 1.2. | $X = Y$ | (1, 1.1, $T6_T$) |
| 1.3. | $Cn'X = Cn'Y$ | (1.2) |
| 1.4. | $X \approx' Y$ | (1.3, D3) |

2.1. $X \approx' Y$ (z. dow.)

2.2. $X = Y$ (2, 2.1, T5)

2.3. $CnX = CnY$ (2.2)

2.4. $X \approx Y$ (2.3, $D2_T$)

$X \approx Y \Longleftrightarrow X \approx' Y$ (1.1.→1.4, 2.1→2.4)

T23. $cnx\neg x,\ c\neg xnx \in Cn\Phi$.

Dowód. 1. $\bigwedge_z x \neq nz \vee \bigvee_z x = nz$

1.1. $\bigwedge_z x \neq nz$ (z.dow.)

1.2. $\neg x = nx$ (1.1, T22)

1.3. $cnxnx \in Cn\Phi$ (Uwaga 1)

1.4. $cnx\neg x,\ c\neg xnx \in Cn\Phi$ (1.3, 1.2)

2.1. $\bigvee_z x = nz$ (z.dow.)

2.2. $x = nz_1$ (2.1)

2.3. $\neg x = \neg nz_1$ (2.2)

2.4. $\neg x = z_1$ (2.3, T21)

2.5. $nx = nnz_1$ (2.2)

2.6. $cnnz_1z_1,\ cz_1nnz_1 \in Cn\Phi$ (Uwaga 1)

2.7. $cnx\neg x,\ c\neg xnx \in Cn\Phi$ (2.6, 2.5, 2.4)

$cnx\neg x,\ c\neg xnx \in Cn\Phi$ (1, 1.1→1.4, 2.1→2.7)

T25a. $\neg x \in CnX \Longleftrightarrow nx \in CnX.$

Dowód. 1.1. $\neg x \in CnX$ (z.dow.)

1.2. $c\neg xnx \in CnX$ $(T23,\ A3_T)$

1.3. $nx \in CnX$ $(1.1,\ 1.2,\ T13_T)$

2.1. $nx \in CnX$ (z.dow.)

2.2. $cnx\neg x \in CnX$ $(T23,\ A3_T)$

2.3. $\neg x \in CnX$ $(2.1,\ 2.2,\ T13_T)$

$\neg x \in CnX \Longleftrightarrow nx \in CnX$ $(1.1 \rightarrow 1.3,\ 2.1 \rightarrow 2.3)$

T25b. $\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow nx \in Cn'X.$

Dowód. 1.1. $\neg x \in Cn'X$ (z.dow.)

1.2. $cnx\neg x \in Cn\,\Phi$ (T23)

1.3. $nx \in Cn'X$ (1.2, 1.1, T2)

2.1. $nx \in Cn'X$ (z.dow.)

2.2. $c\neg xnx \in Cn\,\Phi$ (T23)

2.3. $\neg x \in Cn'X$ (2.2, 2.1, T2)

$\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow nx \in Cn'X$ $(1.1 \rightarrow 1.3,\ 2.1 \rightarrow 2.3)$

T26a. $\neg x \in CnX \Longleftrightarrow x \in CnX$

Dowód. 1. $\bigwedge_z x \neq nz \vee \bigvee_z x = nz$

1.1. $\bigwedge_z x \neq nz$ (z.dow.)

1.2. $\neg x = nx$ (1.1, T22)

1.3. $\neg\neg x = x$ (1.2, T21)

1.4. $\neg\neg x \in CnX \Longleftrightarrow x \in CnX$ (1.3)

2.1. $\bigvee_{z} x = nz$ (z.dow.)

2.2. $x = nz_1$ (2.1)

2.3. $\neg x = z_1$ (2.2, T21)

2.4. $\neg\neg x \in CnX \Longleftrightarrow nz_1 \in CnX \Longleftrightarrow x \in CnX$ (T25a, 2.3, 2.2)

$\neg\neg x \in CnX \Longleftrightarrow x \in CnX$ (1, 1.1→1.4, 2.1→2.4)

T26b. $\neg\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow x \in Cn'X$.

Dowód. 1. $cc\neg\neg xycxy,\ ccxyc\neg\neg xy \in Cn\Phi$ (Uwaga 1, Uwaga 2)

2. $y \in Cn\{\neg\neg x\} \Longleftrightarrow c\neg\neg xy \in Cn \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow cxy \in Cn\Phi \Longleftrightarrow y \in Cn\{x\}$ $(A6_T,\ 1,\ T13_T)$

3. $\neg\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} y \in Cn\{\neg\neg x\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} y \in Cn\{x\} \Longleftrightarrow x \in Cn'X$ (D1, 2)

$\neg\neg x \in Cn'X \Longleftrightarrow x \in Cn'X$ (3)

T34. $Cn'NNX = Cn'X = NNCn'X$.

Dowód. 1. $y \in Cn'X \Longleftrightarrow \neg\neg y\ Cn'X \Longleftrightarrow y \in NNCn'X$ (T26b, D9)

1.1. $y \in Cn'NNX$ (z.dow.)

| | | |
|---|---|---|
| 1.2. | $x_1 \in NNX$ | (1.1, T1b) |
| 1.3. | $cyx_1 \in Cn\Phi$ | |
| 1.4. | $\neg\neg x_1 \in X$ | (1.2, D9) |
| 1.5. | $ccyx_1 cy\neg\neg x_1 \in Cn\Phi$ | (Uwaga 1, Uwaga 2) |
| 1.6. | $cy\neg\neg x_1 \in Cn\Phi$ | (1.3, 1.5, $T13_T$) |
| 1.7. | $y \in Cn'X$ | (1.4, 1.6, T1b) |
| 2.1. | $y \in Cn'X$ | (z.dow.) |
| 2.2. | $x_2 \in X$ | |
| 2.3. | $cyx_2 \in Cn\Phi$ | (2.1, D1) |
| 2.4. | $nnx_2 \in NNX$ | (2.2, T28) |
| 2.5. | $ccyx_2 cynnx_2 \in Cn\Phi$ | (Uwaga 1) |
| 2.6. | $cynnx_2 \in Cn\Phi$ | (2.3, 2.5, $T13_T$) |
| 2.7. | $y \in Cn'NNX$ | (2.4, 2.6, T1b) |
| | $Cn'NNX = Cn'X = NNCn'X$ | (1, 1.1→1.7, 2.1→2.7) |

T35. $X \neq \Phi \Longrightarrow NCn\Phi \subset Cn'X.$

| | | |
|---|---|---|
| Dowód. 1. | $X \neq \Phi$ | (zał.) |
| 1.1. | $y \in NCn\Phi$ | (z.dow.) |
| 1.2. | $\neg y \in Cn\Phi$ | (1.1, D9) |

1.3. $\neg y \in Cn\{\neg x\} \wedge x \in X$ (1.2, $A3_T$, 1)

1.4. $y \in Cn'\{x\} \wedge x \in X$ (1.3, T27a)

1.5. $y \in Cn'X$ (1.4, T3b)

$NCn\,\Phi \subset Cn'X$ (1.1→1.5)

T37. $NCn'NX \subset CnX.$

Dowód. 1.1. $y \subset NCn'NX$ (z.dow.)

1.2. $\neg y \subset Cn'NX$ (1.1, D9)

1.3. $x_1 \in NX$ } (1.2, T1b)

1.4. $c\neg yx_1 \in Cn\Phi$ }

1.5. $cc\neg yx_1 c\neg x_1 y \in Cn\Phi$ (Uwagi 1 i 2)

1.6. $c\neg x_1 y \in Cn\Phi$ (1.4, 1.5, $T13_T$)

1.7. $y \in Cn\{\neg x_1\}$ (1.6, $A6_T$)

1.8. $\neg x_1 \in X$ (1.3, D9)

1.9. $y \in CnX$ (1.8, $A3_T$, 1.7)

$NCn'NX \subset CnX$ (1.1—1.9)

T38. $Cn\{x\} = NCn'\{nx\} = NCn'N\{x\}.$

Dowód. 1. $y \in Cn\{x\} \Longleftrightarrow x \in Cn'\{y\} \Longleftrightarrow \neg y \in Cn'\{\neg x\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y \in NCn'\{\neg x\} \Longleftrightarrow y \in NCn'\{nx\}$

(T7, T27b, D9, T24b)

| | | |
|---|---|---|
| 2. | $Cn\{x\} = NCn'\{nx\}$ | (1) |
| 3. | $NCn'\{nx\} \subset NCn'N\{x\}$ | (T30, T3b, T33) |
| 4. | $NCn'N\{x\} \subset Cn\{x\}$ | (T37) |
| 5. | $NCn'N\{x\} \subset NCn'\{nx\}$ | (4, 2) |
| 6. | $NCn'\{nx\} = NCn'N\{x\}$ | (3, 5) |
| | $Cn\{x\} = NCn'\{nx\} = NCn'N\{x\}$ | (2, 6) |

T39. $X \in Nsp \Longrightarrow CnX \cap Cn'NX = \Phi$ .

Dowód.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $X \in Nsp$ | (zał.) |
| 2. | $CnX \cap Cn'NX \neq \Phi$ | (z.d.n.) |
| 3. | $y_1 \in CnX$ | (2) |
| 4. | $y_1 \in Cn'NX$ | (2) |
| 5. | $x_1 \in NX$ | (4, T1b) |
| 6. | $cy_1x_1 \in Cn\Phi$ | (4, T1b) |
| 7. | $ccy_1x_1c\neg x_1ny_1 \in Cn\Phi$ | (Uwagi 1 i 2) |
| 8. | $c\neg x_1ny_1 \in Cn\Phi$ | (6, 7, $T13_T$) |
| 9. | $\neg x_1 \in X$ | (5, D9) |
| 10. | $ny_1 \in Cn\{\neg x_1\}$ | (8, $A6_T$) |
| 11. | $y_1, ny_1 \in CnX$ | (3, 9, $A3_T$, 10) |
| | Sprzeczność | (11, $T11_T$, 1) |

T40a. $X \in Syst \Longrightarrow NX \in Syst'$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dowód. | 1. | $X \in Syst$ | (zał.) |
| | 2. | $CnX \subset X$ | (1, $D1_T$) |
| | 1.1. | $y \in Cn'NX$ | (z.dow.) |
| | 1.2. | $x_1 \in NX$ | (1.1, T1b) |
| | 1.3. | $cyx_1 \in Cn\Phi$ | (1.1, T1b) |
| | 1.4. | $ccyx_1c\neg x_1\neg y \in Cn\Phi$ | (Uwagi 1 i 2) |
| | 1.5. | $c\neg x_1\neg y \in Cn\Phi$ | (1.3, 1.4, $T13_T$) |
| | 1.6. | $\neg y \in Cn\{\neg x_1\}$ | (1.5, $A6_T$) |
| | 1.7. | $\neg x_1 \in X$ | (1.2, D9) |
| | 1.8. | $\neg x \in CnX$ | (1.7, $A3_T$, 1.6) |
| | 1.9. | $\neg y \in X$ | (2, 1.8) |
| | 1.10. | $y \in NX$ | (1.9, D9) |
| | 3. | $Cn'NX \subset NX$ | (1.1, 1.10) |
| | | $NX \in Syst'$ | (3, D2 ) |

T40b. $NX \in Syst \Longrightarrow X \in Syst'$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dowód. | 1. | $NX \in Syst$ | (zał.) |
| | 2. | $NNX \in Syst'$ | (1, T40a) |
| | 3. | $Cn'NNX \subset NNX$ | (2, D2) |

| | | |
|---|---|---|
| 1.1. | $y \in Cn'X$ | (z.dow.) |
| 1.2. | $\neg ny \in Cn'X$ | (1.1, T21) |
| 1.3. | $nny \in Cn'NNX$ | (1.2, T25b, T34) |
| 1.4. | $nny \in NNX$ | (3, 1.3) |
| 1.5. | $y \in X$ | (1.4, T28) |
| 4. | $Cn'X \subset X$ | (1.1 1.5) |
| | $X \in Syst'$ | (4, D2) |

T41a. $X \in Nsp \Longrightarrow NX \in Nsp'$

Dowód.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $X \in Nsp$ | (zał) |
| 2. | $NX \notin Nsp'$ | (z.d.n.) |
| 3. | $y_1, ny_1 \in Cn'NX$ | (2, D6) |
| 4. | $x_1 \in NX$ | (3, T1b) |
| 5. | $cy_1x_1 \in Cn\Phi$ | |
| 6. | $x_2 \in NX$ | (3, T1b) |
| 7. | $cny_1x_2 \in Cn\Phi$ | |
| 8. | $\neg x_1 \in X$ | (4, D9) |
| 9. | $\neg x_2 \in X$ | (6, D9) |
| 10. | $ccy_1x_1c\neg x_1ny_1, ccny_1x_2c\neg x_2y_1 \in Cn\Phi$ | (Uwagi 1 i 2) |
| 11. | $c\neg x_1ny_1, c\neg x_2y_1 \in Cn\Phi$ | (5, 7, 10, $T13_T$) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 12. | $y_1 \in Cn\{\neg x_2\}$ | $(11, A6_T)$ |
| | 13. | $ny_1 \in Cn\{\neg x_1\}$ | |
| | 14. | $y_1, ny_1 \in CnX$ | $(8, 9, A3_T, 12, 13)$ |
| | | Sprzeczność | $(14, T11_T, 1)$ |
| T41b. | | $NX \in Nsp' \Longrightarrow X \in Nsp'$. | |
| Dowód. | 1. | $NX \in Nsp$ | (zał.) |
| | 2. | $NNX \in Nsp'$ | (1, T41a ) |
| | | $X \in Nsp'$ | (2, D6, T34) |
| T42a. | | $X \in Zpł' \Longrightarrow NX \in Zpł$. | |
| Dowód. | 1. | $X \in Zpł'$ | (zał.) |
| | 2. | $\bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$ | (1, D7) |
| | 1.1. | $y \in Cn'X$ | (z. dow.) |
| | 1.2. | $x_1 \in X$ | (1.1, T1b) |
| | 1.3. | $cyx_1 \in Cn\Phi$ | |
| | 1.4. | $ccyx_1cnx_1ny \in Cn\Phi$ | (Uwaga 1) |
| | 1.5. | $cnx_1ny \in Cn\Phi$ | $(1.3, 1.4, T13_T)$ |
| | 1.6. | $ny \in Cn\{nx_1\}$ | $(1.5, A6_T)$ |
| | 1.7. | $nx_1 \in NX$ | (1.2, T28) |

1.8. $ny \in CnNX$ $(1.7,\ A3_T,\ 1.6)$

1.9. $y \in CnNX \vee ny \in CnNX$ $(1.8)$

2.1. $ny \in Cn'X$ (z.dow.)

2.2. $x_2 \in X$

2.3. $cnyx_2 \in Cn\Phi$ $\Big\}$ $(2.1,\ T1b)$

2.4. $conyx_2cnx_2y \in Cn\Phi$ (Uwaga 1)

2.5. $cnx_2y \in Cn\Phi$ $(2.3,\ 2.4,\ T13_T)$

2.6. $y \in Cn\{nx_2\}$ $(2.6.\ A6_T)$

2.7. $nx_2 \in NX$ $(2.2,\ T28)$

2.8. $y \in CnNX$ $(2.7,\ A3_T,\ 2.6)$

2.9. $y \in CnNX \vee ny \in CnNX$ $(2.8)$

3. $\bigwedge_x (x \in CnNX \vee nx \in CnNX)$ $(2,\ 1.1 \to 1.9,\ 2.1 \to 2.9)$

$NX \in Zpł$ $(3,\ T12_T)$

T42b. $NX \in Zpł' \Longrightarrow X \in Zpł.$

Dowód. 1. $NX \in Zpł'$ (zał.)

2. $\bigwedge_x (x \in Cn'NX \vee nx \in Cn'NX)$ $(1,\ D7)$

1.1. $y \in Cn'NX$ (z.dow.)

1.2. $\neg ny \in Cn'NX$ $(1.1,\ T21)$

1.3. $ny \in NCn'NX$ $(1.2,\ D9)$

| | | |
|---|---|---|
| 1.4. | $ny \in CnX$ | (1.3, T37) |
| 1.5. | $y \in CnX \vee ny \in CnX$ | (1.4) |
| 2.1. | $ny \in Cn'NX$ | (z.dow.) |
| 2.2. | $\neg y \in Cn'NX$ | (2.1, T25b) |
| 2.3. | $y \in NCn'NX$ | (2.2, D9) |
| 2.4. | $y \in CnX$ | (2.3, T37) |
| 2.5. | $y \in CnX \vee ny \in CnX$ | (2.4) |
| 3. | $\bigwedge_x (x \in CnX \vee nx \in CnX)$ | (2, 1.1 → 1.5, 2.1 → 2.5) |
| | $X \in Zpł$ | (3, $T12_T$) |

T43a. $NX \in Nzl' \Longrightarrow X \in Nzl'$.

Dowód.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $NX \in Nzl'$ | (zał.) |
| 2. | $X \notin Nzl'$ | (z.d.n.) |
| 3. | $x_1 \in X$ | (2, D5) |
| 4. | $x_1 \in Cn'(X \setminus \{x_1\})$ | (2, D5) |
| 5. | $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ | (4, T1b) |
| 6. | $cx_1x_2 \in Cn\Phi$ | (4, T1b) |
| 7. | $nx_2 \in NX \setminus \{nx_1\}$ | (5, T28, T32b) |
| 8. | $nx_2 \neq nx_1 \wedge nx_2 \in NX$ | (7) |
| 9. | $cnx_2nx_1 \in Cn\Phi$ | (6, Uwaga 1, $T13_T$) |

| | |
|---|---|
| 10. $nx_2 \in Cn'\{nx_1\}$ | (9, T1b) |
| 11. $nx_1 \in NX$ | (3, T28) |
| 12. $nx_2 \in Cn'(NX \setminus \{nx_2\})$ | (11, 10, 8, T3b) |
| Sprzeczność | (12, 8, D5, 1) |

T43b. $NX \in Nzl \Longrightarrow X \in Nzl'$

| | |
|---|---|
| Dowód. 1. $NX \in NZl$ | (zał.) |
| 2. $NX \in Nzl'$ | (1, T13) |
| $X \in NZl'$ | (2, T43a) |

T44a. $X \in Zpł \cap Syst \vee NX \in Zpł \cap Syst \Longrightarrow X, NX \in Zpł \cap Zpł'$

| | |
|---|---|
| Dowód. 1. $X \in Zpł \cap Syst \vee NX \in Zpł \cap Syst$ | (zał.) |
| 1.1. $X \in Zpł \cap Syst$ | (z.dow.) |
| 1.2. $\bigwedge_x (x \in CnX \vee nx \in CnX)$ | (1.1, $T12_T$, $D1_T$) |
| 1.3. $CnX \subset X$ | (1.1, $T12_T$, $D1_T$) |
| 1.4. $\bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$ | (1.2, 1.3, T3a) |
| 1.5. $\bigwedge_x (\neg nx \in X \vee \neg x \in X)$ | (1.2, T21, T25a, 1.3) |
| 1.6. $\bigwedge_x (x \in NX \vee nx \in NX)$ | (1.5, D9) |
| 1.7. $\bigwedge_x (x \in CnNX \vee nx \in CnNX)$ | (1.6, $A2_T$) |

1.8. $\bigwedge_x (x \in Cn'NX \vee nx \in Cn'NX)$ (1.6, T3a)

1.9. $X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (1.2, 1.7, $T12_T$, 1.4, 1.8, D7)

2.1. $NX \in Zpł \cap Syst$ (z.dow.)

2.2. $\bigwedge_x (x \in CnNX \vee nx \in CnNX)$

2.3. $CnNX \subset NX$

(2.1, $T12_T$, $D1_T$)

2.4. $\bigwedge_x (x \in NX \vee nx \in NX)$ (2.2, 2.3)

2.5. $\bigwedge_x (x \in X \vee x \in X)$ (2.4, T28, D9)

2.6. $\bigwedge_x (x \in Cn'NX \vee nx \in Cn'NX)$ (2.4, T3a)

2.7. $\bigwedge_x (x \in CnX \vee nx \in CnX)$ (2.5, $A2_T$, T25a)

2.8. $\bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$ (2.5, T3a, T25b)

2.9. $X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (2.7, 2.2, $T12_T$, 2.8, 2.6, D7)

$X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (1, 1.1 → 1.9, 2.1 → 2.9)

T44b. $X \in Zpł' \cap Syst' \vee NX \in Zpł' \cap Syst' \Longrightarrow X, NX \in Zpł \cap Zpł'$.

Dowód. 1. $X \in Zpł' \cap Syst' \vee NX \in Zpł' \cap Syst'$ (zał.)

1.1. $X \in Zpł' \cap Syst'$ (z.dow)

1.2. $NX \in Zpł$ (1,1, T42a)

1.3. $Cn'X \in X$ (1.1, D2)

1.4. $\bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$ (1.1, D7)

1.5. $\bigwedge_x (x \in X \vee nx \in X)$ (1.4, 1.3)

1.6. $\bigwedge_x (nx \in NX \vee nnx \in NX)$ (1.5, T28)

1.7. $\bigwedge_x (x \in CnX \vee nx \in CnX)$ (1.4, $A2_T$)

1.8. $\bigwedge_x (x \in Cn'NX \vee nx \in Cn'NX)$ (1.6, T3a, T25b, T21)

1.9. $X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (1.7, $T12_T$, 1.2, 1.4, 1.8, D7)

2.1. $NX \in Zpł' \cap Syst'$ (z.dow.)

2.2. $X \in Zpł$ (2.1, T42b)

2.3. $Cn'NX \subset NX$ (2.1, D2)

2.4. $\bigwedge_x (x \in NX \vee nx \in NX)$ (2.1, D7, 2.3)

2.5. $\bigwedge_x (x \in X \vee \neg x \in X)$ (2.4, T28, D9)

2.6. $\bigwedge_x (x \in CnNX \vee nx \in CnNX)$ (2.4, $A2_T$)

2.7. $\bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$ (2.5, T3a, T25b)

2.8. $X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (2.2, 2.6, $T12_T$, 2.1, 2.4, D7)

$X, NX \in Zpł \cap Zpł'$ (1, 1.1 $\rightarrow$ 1.9, 2.1 $\rightarrow$ 2.8)

T49. $Cn'\{y\} \cap Cn'\{ny\} = Cn'\{ncxx\} = NCn\Phi$.

Dowód. 1. $Cn'\{y\} \cap Cn'\{ny\} = Cn'\{k(y,ny)\} =$

$= Cn'\{ncyy\} = Cn'\{ncxx\}$ (T48b, D11b, T21, Uwaga 1, T11a)

2. $Cn\emptyset = Cn\{cxx\} = NCn'\{ncxx\}$ ($A3_T$, Uwaga 1, $A4_T$, T38)

3. $NCn\emptyset = NNCn'\{ncxx\} = Cn'\{ncxx\}$ (2, T33, T34)

$Cn'\{y\} \cap Cn'\{ny\} = Cn'\{ncxx\} = NCn\emptyset$ (1, 3)

T50. $Cn\{x_1,\ldots,x_2\} = NCn'\{nk(x_1,\ldots,x_n)\} = NCn'\{a(nx_1,\ldots,nx_n)\}$ (1, 3)

Dowód. 1. $Cn\{x_1,\ldots,x_n\} = Cn\{k(x_1,\ldots,x_n)\} =$

$= NCn'\{nk(x_1,\ldots,x_n)\}$ (T47b, D11, T38)

2. $\left.\begin{array}{l} cnk(x_1,\ldots,x_n)a(nx_1,\ldots,nx_n) \in Cn\emptyset \\ ca(nx_1,\ldots,nx_n)nk(x_1,\ldots,x_n) \in Cn\emptyset \end{array}\right\}$ (Uwaga 3)

3. $Cn'\{nk(x_1,\ldots,x_n)\} = Cn'\{a(nx_1,\ldots,nx_n)\}$ (2, T11a)

4. $NCn'\{nk(x_1,\ldots,x_n)\} = NCn'\{a(nx_1,\ldots,nx_n)\}$ (3, T33)

$Cn\{x_1,\ldots,x_n\} = NCn'\{nk(x_1,\ldots,x_n)\} =$

$= NCn'\{a(nx_1,\ldots,nx_n)\}$ (1, 4)

T52a. $Cn'AAX = Cn'AX$

Dowód. 1. $AX \subset AAX$ (T51)

2. $Cn'AX \subset Cn'AAX$ (1, T3b)

1.1. $z \in AAX$ (z.dow.)

| | | |
|---|---|---|
| 1.2. | $z = a(x_1,\dots,x_n)$ | (D12, 1.1) |
| 1.3. | $x_1,\dots,x_n \in AX$ | (D12, 1.1) |
| 1.4. | Niech ciąg $y_1,\dots,y_m$ będzie ciągiem wszystkich różnych zdań zbioru $X$ będących składnikami alternatyw $x_1,\dots,x_n$ | (oznacz.) |
| 1.5. | $a(y_1,\dots,y_m) \in AX$ | (1.3, 1.4, D12) |
| 1.6. | $cza(y_1,\dots,y_n) \in Cn\Phi$ | (Uwaga 3, 1.2, 1.4) |
| 1.7. | $z \in Cn'AX$ | (1.5, 1.6, T1b) |
| 3. | $AAX \subset Cn'AX$ | (1.1—1.7) |
| 4. | $Cn'AAX \subset Cn'AX$ | (3, T3b,c) |
| | $Cn'AAX = Cn'AX$ | (2, 4) |

T52b. $Cn'ANNX = Cn'AX.$

| | | |
|---|---|---|
| Dowód. 1.1. | $y \in ANNX$ | (z.dow.) |
| 1.2. | $y = a(x_1,\dots,x_n) \wedge x_1,\dots,x_n \in NNX$ | (1.1, D12) |
| 1.3. | $\neg\neg x_1,\dots,\neg\neg x_n \in X$ | (1.2, D9) |
| 1.4. | Niech $t_1,\dots,t_k$ będzie ciągiem wszystkich różnych zdań wybranych z ciągu $\neg\neg z_1,\dots,\neg\neg z_n$ | (oznacz.) |
| 1.5. | $a(t_1,\dots,t_k) \in AX$ | (1.3, 1.4, D12) |

1.6. $cya(t_1,\dots,t_k) \in Cn\Phi$ (1.2, 1.4, Uwagi 3 i 4, $T13_T$)

1.7. $y \in Cn'AX$ (1.5, 1.6, T1b)

2.1. $y \in AX$ (z.dow.)

2.2. $y = a(z_1,\dots,z_m) \wedge z_1,\dots z_m \in X$ i są różne (2.1, D12)

2.3. $nnz_1,\dots,nnz_m \in NNX$ i są różne (2.2, T28, $A10_T$)

2.4. $a(nnz_1,\dots,nnz_m) \in ANNX$ (2.3, D12)

2.5. $cya(nnz_1,\dots,nnz_m) \in Cn\Phi$ (2.2, Uwaga 3)

2.6. $y \in Cn'ANNX$ (2.4, 2.5, T1b)

$Cn'ANNX = Cn'AX$ (1.1 → 1.7, 2.1 → 2.6, T3b,c)

T58. $x,y \in Cn'X \Longrightarrow a(x,y) \in Cn'AX.$

Dowód. 1. $x,y \in Cn'X$ (zał.)

2. $cxx_1 \in Cn\Phi$

3. $x_1 \in X$

4. $cyx_2 \in Cn\Phi$

5. $x_2 \in X$

(1, T1b)

6. $ccxx_1ccyx_2ca(x,y)a(x_1,x_2) \in Cn\Phi$ (Uwaga 3)

7. $ca(x,y)a(x_1,x_2) \in Cn\Phi$ (2, 4, 6, $T13_T$)

1.1. $x_1 = x_2$ (z.dow.)

1.2. $\mathrm{ca}(x,y)x_1 \in Cn\,\Phi$ (Uwaga 3, 7, 1.1, $T13_T$)

1.3. $a(x,y) \in Cn'AX$ (3, T51a, 1.2, T1b)

2.1. $x_1 \neq x_2$ (z.dow.)

2.2. $a(x_1,x_2) \in AX$ (2.1, 3, 5, D12)

2.3. $a(x,y) \in Cn'AX$ (2.2, 7, T1b)

$a(x,y) \in Cn'AX$ (1.1→1.3, 2.1→2.3)

T59. $k(x,y) \in Cn'X \Longrightarrow y \in Cn'A(X \cup \{nx\})$.

Dowód. 1. $k(x,y) \in Cn'X$ (zał.)

2. $ck(x,y)z \in Cn\,\Phi$ 

3. $z \in X$ (1, T1b)

4. $cck(x,y)zcya(z,nx) \in Cn\,\Phi$ (Uwaga 3)

5. $cya(z,nx) \in Cn\,\Phi$ (2, 4, $T13_T$)

$y \in Cn'A(X \cup \{nx\})$ (3, D12, 5, T1b)

T60. $y \in Cn'A(X \cup N\{x\}) \Longrightarrow k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\})$.

Dowód. 1. $y \in Cn'A(X \cup N\{x\})$ (zał.)

1.1. $X = \Phi$ (z.dow.)

1.2. $y \in Cn'AN\{x\}$ (1, 1.1)

1.3. $Cn'AN\{x\} = Cn'NK\{x\} = Cn'N\{x\}$ (T53, T51d)

1.4. $y \in Cn'N\{x\}$ (1.2, 1.3)

| | | |
|---|---|---|
| 1.5. | $cyz \in Cn\,\Phi$ | (1.4, T1b) |
| 1.6. | $z \in N\{x\}$ | |
| 1.7. | $\neg z \in \{x\}$ | (1.6, D9) |
| 1.8. | $\neg z = x$ | (1.7) |
| 1.9. | $\neg\neg z = \neg x$ | (1.8, D8) |
| 1.10. | $cy\neg x \in Cn\,\Phi$ | (1.5, T21, Uwaga 2, 1.9) |
| 1.11. | $ccy\neg xck(x,y)ncxx \in Cn\,\Phi$ | (Uwagi 3 i 4) |
| 1.12. | $ck(x,y)ncxx \in Cn\,\Phi$ | (1.10, 1.11, $T13_T$) |
| 1.13. | $k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\})$ | (1.12, T1b) |
| 2.1. | $X \neq \Phi$ | (z.dow.) |
| 2.2. | $cyt \in Cn\,\Phi$ | (1, T1b) |
| 2.3. | $t \in A(X \cup N\{x\})$ | |
| 2.4. | Niech u oznacza alternatywę wszystkich zdań zbioru X będących składnikami alternatywy t. Jeśli takich składników nie ma, to niech u oznacza dowolny element zbioru X. | (oznacz., 2.1) |
| 2.5. | Niech $z_1, z_2$ będą wszystkimi elementami zbioru $N\{x\}$. | (T30a-c, oznacz.) |
| 2.6. | $cta(z_1, a(z_2, u)) \in Cn\,\Phi$ | (Uwaga 3, D10, 2.3, 2.4, 2.5) |
| 2.7. | $\neg z_1, \neg z_2 \in \{x\}$ | (D9, 2.5) |

2.8. $\neg\neg z_1 = \neg\neg z_2 = \neg x$ (2.7)

2.9. $cta(nx,u) \in Cn\Phi$ (2.6, T21, Uwagi 4 i 3, 2.8, $T13_T$)

2.10. $ccytccta(nx,u)ck(x,y)u \in Cn\Phi$ (Uwaga 3)

2.11. $ck(x,y)u \in Cn\Phi$ (2.2, 2.9, 2.10, $T13_T$)

2.12. $k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\})$ (2.4, 2.11, D12, T1b)

$k(x,y) \in Cn'(AX \cup \{ncxx\})$ (1.1$\rightarrow$1.13, 2.1$\rightarrow$2.12)

## BIBLIOGRAFIA

[1] J. Łukasiewicz - O sylogistyce Arystotelesa. Sprawozdania z czynności i posiedzeń Polskiej Akademii Umiejętności, t. XLIV (1939).

[2] J. Łukasiewicz - Aristotle's Syllogistic. Oxford 1951.

[3] J. Łukasiewicz - A system of modal logic. The Journal of Computing Systems, vol. 1, no.3 (1953), pp. 111-149.

[4] J. Słupecki - Z badań nad sylogistyką Arystotelesa. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego (B), Nr 6 (1948).

[5] J. Słupecki - Funkcja Łukasiewicza. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego (B), Nr 3 (1959).

[6] A. Tarski - Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII Band (1930) pp. 361-404.

[7] A. Tarski - Über einige fundamentale Begriffe der Mathematik. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl.III, vol. 23 (1930) pp. 22-29.

[8] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - O dowodzie matematycznym. Warszawa 1962.

[9] J. Słupecki, L. Borkowski - Elementy logiki matematycznej teorii mnogości. Warszawa 1963.

[10] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach, Cz. I. Studia Logica, t. IX (1960).

Praca wpłynęła dnia 15 maja 1967 r.

## THEORY OF REJECTED SENTENCES


### S u m m a r y

The concept of a rejected sentence was introducet by J. Łukasiewicz in the course of his inquiry into Arystotelian Syllogistic. It was essentially generalized by Prof. J. Słupecki who, with reference to Tarski's axiomatic theory systems, gave the following definition:

D1. $y \in Cn' X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\}$

According to this definition, a sentence y is rejected on the base of a set of sentences X if and only if at least one sentence which belongs to X can be deduced from the sentence y. In the paper [5] the proof is given that the function Cn' which assigns to a set X the set of the sentences rejected on the base of X is additive and satisfies the axioms of Tarski's General Theory of Systems [6]. The symbol S which appears in axioms of Tarski's theory denotes the set of all sentences of a certain fixed language L, the symbol CnX denotes the set of all sentences deducible from X. The variables x, y, z,... run over the set S, the variables X, Y, Z,... reprezent the subsets of S.

We also make use of Tarski's enlarged theory of systems [7] in our paper. It involves, beside Cn and S, some additional primitive terms "c" and "n". The formula "cxy" denotes the conditional whose antecedent is x and consequent is y. The formula "nx" denotes the negation of the sentence x.

The theory T is set up the paper. It results from Tarski's enlarged theory of systems by adding the axiom:

$$nx = ny \Longrightarrow x = y$$

and a number of definitions, among them D1 is a fundamental one. $Cn'$ is a function which assigns to every set X of false sentences the set $Cn'X$ whose members are exlusively false sentences. This may be regarded as a basic property of $Cn'$.

The terms Syst$'$, $\approx'$, Aks$'$. Nzl$'$ are introduced in the theory T. They correspond to the analogous terms introduced by Tarski, and respectively denote: the set of systems with respect to rejection, the equivalence with respect to rejection, etc.

On can obtain the right sides of the definitions of these terms by substituting $Cn'$ for $Cn$ in the appropriate Tarski's definitions.

The following theorem holds:

If $\alpha$ is a theorem of Tarski's General Theory of Systems which does not contains any symbols diffrent from variables, the symbol S, and the symbols

$$Cn, \text{Syst}, \approx, \text{Aks}, \text{Nzl}, \tag{1}$$

then the formula $\alpha'$ which is the results of substituting the symbols

$$Cn', \text{Syst}', \approx', \text{Aks}', \text{Nzl}' \tag{1'}$$

respectively for the symbols (1) in $\alpha$ is a theorem of T.

The concept of a consistent set with respect to rejection and a complete set with respect to rejection are defined as follows:

D6. $X \in Nsp' \Longleftrightarrow \sim \bigvee_{x} (x,\ nx \in Cn'X)$,

D7. $X \in Zpl' \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$.

These definitions can be justified by some informal arguments.

The following two definitions do not possess counterparts in Tarski's theory

D8. $y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny$,

D9. $x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X$.

The formula "$\neg x$" is called the sentence contradicting the sentence $x$. $NX$ is called the negation of the set $X$.

A number of theorems which describe properties of defined concepts have been proved in $T$. Some of them are necessary for conducting the considerations of the concluding section is devoted to the empirical sentences.

Section II deals with the theory of the unit consequence. The only primitive terms of this theory are $S$ and $Cn_1$. The terms $S$ is understood in the same way as in the theory $T$, while $Cn_1$ is characterized by the axiom

$A_1 1.$ $y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} Cn_1\{y\} \subset Cn_1\{x\}$.

It has been shown that $Cn_1$ satisfies the axioms of Tarski's General Theory of Systems, is additive and possesses the following property

$$y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn_1 \{x\}$$

The last fact should explain why $Cn_1$ have been named "the unit consequence".

It is also shown that every additive function $F$ which satisfies the axioms of Tarski's General Theory of Systems and the following condition $F\Phi = \Phi$ satisfies the formula $A_1 1$.
The function $Cn'$ and $Cn^*$, the latter being defined as follows

$$Cn^* X = NCn' NX$$

are unit consequences.

An axiomatic theory $T'$ is set up in Section III. The primitive terms of it are the same as those of $T$ except $Cn$ which is replaced by $Cn'$. $T$ and $T'$ are proved to be equivalent. The fundamental axiom of $T'$ is that characterizing $Cn'$ as a unit consequence.

The concluding section brings a few examples of application of the definitions and theorems of $T$ in the field of the scientific methodology. The concept of the set of the empirical sentences $Emp^+$ is taken as a new primitive term, and characterized by the following two axioms:

$A1_E$. $nx \notin Emp^+$,

$A2_E$. $X \subset Emp^+ \cup NEmp^+ \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X \Longrightarrow X \in Nsp$.

Consequently, the set $Emp^{+}$ consists of the sentences which are not negation of any sentence.

The axiom $A2_E$ is equivalent to the following theorem

$T1_E$. $Emp^{*} \subset Nsp$

in virtue of the following definitions

$D1_E$. $Emp = Emp^{+} \cup NEmp^{+}$,

$D2_E$. $X \in Emp^{*} \Longleftrightarrow X \subset Emp \wedge \sim \bigvee_{x} x, nx \in X$.

The set Emp, which is called the set of empirical sentences in an enlarged sense. It consists of the empirical sentences and their negations. The members of the set $Emp^{*}$ are called the empirical bases. The axiom $A2_E$ states then that none empirical base contains both sentence and its negation at the same time.

The following theorems reveal more important properties of empirical sentences:

$$Emp^{*} \subset Nsp' \cap Nzl \cap Nzl',$$

$$X \in Emp^{*} \Longrightarrow CnX \cap Cn'NX = \Phi,$$

$$X \in Emp^{*} \Longrightarrow CnX \cap Emp = X = Cn'X \cap Emp.$$

According to the first theorem, none pair of sentences such that one of them is the negation of the latter can be rejected on the ground of any empirical base. This theorem also states that none sentence which belongs to an empirical base can be either proved or rejected with the help of the other sentences of the base. The second theorem states that none sentence which results from a empirical base can be rejected on the ground of the negation of this base. At least, according to the third theorem, only those empirical sentences which belong to a base can be either deduced or rejected with the help of the base.

There is another theorem given in the paper which is interesing

$$X \in Emp^{*} \Longrightarrow \bigvee_{Y} (NX \subset Y \wedge Y \in Nsp' \cap Zpł' \cap Syst').$$

It states, that for the negation of any empirical base there always is a system with respect to rejection which is consistent with respect to rejection and complete with respect to rejection such that it includes that negation.

# ТЕОРИЯ ОТБРАСЫВАЕМЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

## Резюме


Поняте отбрасываемого предложения было введено Я. Лукасевичом в связи с его исследованиями в области силогистики Аристотеля. Опираясь на аксиоматическую теорию дедуктивных систем А. Тарского Профессор Слупецкий сформулировал существенное обобщение и привел ряд свойств этого понятия; именно он принял следующее определение:

$$D1. \quad y \in Cn'X \iff \bigvee_{x \in X} x \in Cn\{y\},$$

согласно которому предложение $y$ отбрасываемо на основании предложений некоторого множества $X$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одно предложение множества $X$ выводимо на основании этого предложения. В работе [5] показывается, что функция $Cn'$, ставящая в соответствие множеству $X$ класс предложений отбрасываемых на основани предложений из множества $X$, это аддитивная функция удовлетворяющая аксиомам общей теории (дедуктивных) систем Тарского [6]. Символ $S$ выступающий в аксиомах теории Тарского означает множество всех предложений фиксированного языка, символ $CnX$ - множество всех предложений выводимых из множества $X$. Переменные $x$, $y$, $z$, ... пробегают через множество $S$, переменные $X$, $Y$, $Z$, ... - через семейство подмножеств этого множества.

В работе мы используем также обогащенную теорию дедуктивных систем Тарского [7], в которой наряду с символами $Cn$ и $S$ выступают новые первичные термины "c" и "n". Выражение "cxy" означает импликацию с антецедентом $x$ и с консеквентом $y$ а выражение "nx" означает отрицание предложения $x$.

В работе строится теория $T$, которая получается из обогащенной теории Тарского присоединением аксиомы

$$nx = ny \implies x = y$$

а также ряда определений, среди которых существенную роль играет D1. Основное свойство функции $Cn'$ состоит в том, что произвольному множеству ложных предложений $X$ она ставит в соответствие множество $Cn'X$ состоящее исключительно из ложных предложений.

В теории $T$ вводятся термины $Syst'$, $\approx'$, $Aks'$, $Nzl'$, аналогично к соответствующим терминам введенным Тарским. Эти термины означают соответственно семейство (дедуктивных) систем относительно отбрасывания, равносильность относительно отбрасывания итд. Выражения определяющие эти термины получаются из выражений выступающих в соответствующих определениях Тарского посредством замены символа $Cn$ через символ $Cn'$.

Имеет место теорема:

Если $\alpha$ является произвольной теоремой общей теории (дедуктивных) систем, в которой кроме символа $S$ и переменных могут выступать только символы

$$Cn, \quad Syst, \quad \approx, \quad Aks, \quad Nzl, \tag{1}$$

то выражение $\alpha'$, которое получается из $\alpha$ посредством замены символов (1) соответственно символами

$$Cn', \quad Syst', \quad \approx', \quad Aks', \quad Nzl', \tag{1'}$$

является теоремой теории $T$.

Определения понятий множества непротиворечивого относительно отбрасывания и множества (дедуктивно) полного относительно отбрасывания имеют вид:

$D_6$. $X \in Nsp' \Longleftrightarrow \sim \bigvee_x (x, nx \in Cn'X)$,

$D_7$. $X \in Zpl' \Longleftrightarrow \bigwedge_x (x \in Cn'X \vee nx \in Cn'X)$.

Принятие именно таких определений продиктовано содержательными соображениями.

Следующие два определения не имеют аналогов в теории Тарского:

$$D_8.\quad y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_z (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny,$$

$$D_9.\quad x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X.$$

Выражение "$\neg x$" называем предложением несовместимым с предложением x. Выражение "NX" называем отрицанием множества X.

В теории T доказывается ряд теорем характеризующих свойства введенных понятий. Некоторые из этих теорем существенно используются в последней главе работы касающейся эмпирических предложений.

Глава II работы посвящена теории единичной консеквенции. Единственными первичными терминами этой теории являются S и $Cn_1$. Смысл термина S такой же как и в теории T, свойства же $Cn_1$ описывает аксиома

$$A_1 1.\quad y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} Cn_1\{y\} \subset Cn_1 \{x\}$$

Доказывается, что функция $Cn_1$ аддитивная и исполняет аксиомы общей теории (дедуктивных) систем Тарского а также обладает следующим свойством:

$$y \in Cn_1 X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} y \in Cn_1 \{x\},$$

которое оправдывает названия: единичная консеквенция.

Доказывается также, что всякая аддитивная функция F исполняющая аксиомы общей теории (дедуктивных) систем Тарского и условие $F\Phi = \Phi$ исполняет выражение $A_1 1$.

Единичными консеквенциями в теории T являются функция Cn а также функция определяемая следующим образом

$$Cn^* X = NCn' NX$$

В главе III строится аксиоматическая теория $T'$, система первичных понятий которой отличается от системы первичных понятий теории $T$ только заменой функции $Cn$ посредством функции $Cn'$. Доказывается равносильность теории $T$ и $T'$. Основной аксиомой теории $T'$ является аксиома постулирующая единичный характер функции $Cn'$.

В последней главе работы приводится пример применения определений и теорем теории $T$ к методологии эмпирических наук. Здесь вводится в качестве нового понятия понятие множества всех эмпирических предложений $Emp^+$ и принимаются следующие две аксиомы

$$A1_E.\quad nx \in Emp^+,$$

$$A2_E.\quad X \subset Emp^+ \cup NEmp^+ \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X \Longrightarrow X \in Nsp.$$

Таким образом множество $Emp^+$ состоит из предложений, которые не являются отрицаниями никаких предложений.
Аксиома $A2_E$ равносильна теореме

$$T1_E.\quad Emp^* \subset Nsp,$$

на основании следующих определений

$$D1_E.\quad Emp = Emp^+ \cup NEmp^+,$$

$$D2_E.\quad X \in Emp^* \Longleftrightarrow X \subset Emp \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X$$

Множество $Emp$, называемое множеством эмпирических предложений в широком смысле, состоит из всех эмпирических предложений и их отрицаний. Элементы семейства $Emp^*$ называются эмпирическими базисами. Таким образом аксиома $A2_E$ гласит, что произвольный эмпирический базис облагает свойством: из него не выводима пара предложений, из которых одно является отрицанием другого.

Следующие теоремы характеризуют важнейшие свойства эмпирических предложений:

$$Emp^* \subset Nsp' \cap Nzl \cap Nzl',$$

$$X \in Emp^* \Longrightarrow CnX \cap Cn'NX = \emptyset,$$

$$X \in Emp^* \Longrightarrow CnX \cap Emp = X = Cn'X \cap Emp.$$

Согласно первой теореме на основании произвольного эмпирического базиса нельзя отбросить никакой пары предложений, из которых одно является отрицанием другого; согласно той же теореме никакое предложение из эмпирического базиса нельзя ни доказать, ни отбросить на основании остальных предложений базиса. Вторая теорема гласит, что никакое предложение выводимое из некоторого эмпирического базиса нельзя отбросить на основании отрицания этого базиса. Наконец согласно третьей теореме на основании произвольного эмпирического базиса нельзя ни вывести, ни отбрасить никаких эмпирических предложений отличных от предложений этого базиса.

Интересна также теорема

$$X \in Emp^* \Longrightarrow \bigvee_{Y} (NX \subset Y \wedge Y \in Nsp' \cap Zpł' \cap Syst').$$

Она гласит, что для отрицания произвольного эмпирического базиса существует заключающая его (дедуктивная) система относительно отбрасывания являющаяся множеством непротиворечивым относительно отбрасывания и (дедуктивно) полным относительно отбрасывания.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W OPOLU
Nr 22 Seria B: MONOGRAFIE 1968

Grzegorz Bryll

# KILKA UZUPEŁNIEŃ TEORII ZDAŃ ODRZUCONYCH

Praca niniejsza nawiązuje do badań J. Słupeckiego i U. Wybraniec-Skardowskiej nad teorią zdań odrzuconych (zob. prace [5], [8])[1].

W pracy podaję kilka uzupełnień tej teorii dotyczących własności następujących zbiorów: niesprzecznych, niesprzecznych ze względu na odrzucanie, zupełnych, zupełnych ze względu na odrzucanie, aksjomatyzowalnych, aksjomatyzowalnych ze względu na odrzucanie, systemów oraz systemów ze względu na odrzucanie. Wprowadzam ponadto pojęcie pełnej pary zbiorów i podaję podstawowe własności tego pojęcia.

Teoria zdań odrzuconych, przedstawiona przez U. Wybraniec-Skardowską w pracy [8], skonstruowana jest w ten sposób, że teorię systemów dedukcyjnych Tarskiego adekwatną względem klasycznego rachunku zdań [6] (zob. także [1 - 4]), wzbogaca się o kilka nowych definicji. Najważniejszym spośród pojęć zdefiniowanych jest wprowadzone przez J. Słupeckiego [5] pojęcie klasy zdań udrzuconych ze względu na zdania dowolnego zbioru.

U. Wybraniec-Skardowska przyjmuje następującą wersję aksjomatyki teorii systemów dedukcyjnych Tarskiego:

1) Pragnę podziękować Panu Profesorowi Doktorowi Jerzemu Słupeckiemu za cenne uwagi związane z niniejszą pracą. Dziękuję również Pani Doktor Urszuli Wybraniec-Skardowskiej za udostępnienie rękopisu pracy "Teoria zdań odrzuconych".

A1. $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$,

A2. $X \subset Cn\, X \subset S$,

A3. $X \subset Y \Longrightarrow Cn\, X \subset Cn\, Y$,

A4. $Cn\, Cn\, X \subset Cn\, X$,

A5. $x \in Cn\, X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn\, Y)$,

A6. $cxy \in Cn\, X \Longleftrightarrow y \in Cn(X \cup \{x\})$,

A7. $Cn\{x, nx\} = S$,

A8. $Cn\{x\} \cap Cn\{nx\} = Cn\emptyset$,

A9. $x, y \in S \Longrightarrow nx, cxy \in S$,

A10. $nx = ny \Longrightarrow x = y$,[2)]

oraz następujące definicje:

D1. $x \in Cn^{-1} X \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} y \in Cn\, \{x\}$,

D2. $y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny$,

D3. $x \in N\, X \Longleftrightarrow \neg x \in X$.

2) Wyrażenie A10 nie figuruje na liście aksjomatów podanych przez A. Tarskiego.

Wyrażenia $y \in Cn^{-1}X$, $y = \neg x$, czytamy odpowiednio: $y$ jest zdaniem odrzuconym ze względu na zdania zbioru $X$, $y$ jest zdaniem sprzecznym ze zdaniem $x$. Zbiór $NX$ nazywamy negacją zbioru $X$[3]. W pracy [8] przyjmuje się ponadto następujące definicje:

D4.1. $X \in Nsp \Longleftrightarrow Cn\, X \neq S$,

D4.2. $X \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow \sim \bigvee_{x} (x, nx \in Cn^{-1}X)$,

D5.1. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \notin Cn\, X} X \cup \{x\} \notin Nsp$,

D5.2. $X \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in Cn^{-1}X \vee nx \in Cn^{-1}X)$,

D6.1. $X \in Syst \Longleftrightarrow Cn\, X \subset X$,

D6.2. $X \in Syst^{-1} \Longleftrightarrow Cn^{-1}X \subset X$.

Symbole $Nsp^{-1}$, $Zpł^{-1}$, $Syst^{-1}$ oznaczają odpowiednio: rodzinę zbiorów niesprzecznych ze względu na odrzucanie, rodzinę zbiorów zupełnych ze względu na odrzucanie, rodzinę systemów ze względu na odrzucanie.

D7.1. $X \approx Y \Longleftrightarrow Cn\, X = Cn\, Y$,

D7.2. $X \approx^{-1} Y \Longleftrightarrow Cn^{-1}X = Cn^{-1}Y$,

D8.1. $Y \in Aks\, X \Longleftrightarrow Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge Y \approx X$,

D8.2. $Y \in Aks^{-1}X \Longleftrightarrow Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge Y \approx^{-1} X$,

---

[3] W pracy [8] zbiór zdań odrzuconych ze względu na zdania zbioru $X$ oznacza się symbolem $Cn'X$. W niniejszym artykule symbolem $X'$ oznaczać będziemy dopełnienie zbioru $X$ tj. $X' = S \setminus X$.

D9.1. $X \in \mathrm{Aks} \Longleftrightarrow \bigvee_{Y} Y \in \mathrm{Aks}\ X,$

D9.2. $X \in \mathrm{Aks}^{-1} \Longleftrightarrow \bigvee_{Y} Y \in \mathrm{Aks}^{-1} X.$

Wyrażenia $X \approx^{-1} Y$, $Y \in \mathrm{Aks}^{-1} X$, $X \in \mathrm{Aks}^{-1}$ czytamy odpowiednio: zbiory $X$ i $Y$ są równoważne ze względu na odrzucanie, $Y$ jest układem aksjomatów odrzuconych zbioru $X$, $X$ jest zbiorem aksjomatyzowalnym ze względu na odrzucanie.

D10a. $a(x) = x,$

b. $a(x_1, x_2) = C \neg x_1 x_2,$

c. $a(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = a(x_1, a(x_2, \ldots, x_{n+1})).$

Powyższa definicja jest definicją indukcyjną uogólnionej alternatywy.

D11. Zbiór $AX$ jest zbiorem wszystkich alternatyw w sensie D10 zbudowanych z różnych zdań zbioru $X$.

W dalszym ciągu korzystał będę z następujących twierdzeń teorii zdań odrzuconych. Twierdzenia te zaczerpnięte są z prac [6] i [8].

$T1^T$a. $X \subset Y \Longleftrightarrow NX \subset NY,$

b. $N(X \setminus Y) = NX \setminus NY.$

$T2^T$a. $nx \in Cn\, X \Longleftrightarrow \neg x \in Cn\, X,$

b. $nx \in Cn^{-1} X \Longleftrightarrow \neg x \in Cn^{-1} X,$

c. $x \in Cn\, X \Longleftrightarrow \neg\neg x \in Cn\, X,$

d. $x \in Cn^{-1} X \Longleftrightarrow \neg\neg x \in Cn^{-1} X.$

$T3^T$. $X \in Nsp \Longleftrightarrow \sim \bigvee_x (x, nx \in Cn\, X)$.

$T4^T$. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_x (x \in Cn\, X \vee nx \in Cn\, X)$.

$T5^T$. $X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_Y (X \subset Y \wedge Y \in Syst \cap Nsp \cap Zpł)$.

$T6^T$. $x \in Cn\Phi \Longleftrightarrow Cn^{-1}\{x\} = S$.

$T7^T$. $X \in Syst \Longrightarrow NX \in Syst^{-1}$.

$T8^T$a. $Cn^{-1}AX = Cn^{-1}ANNX$,

b. $X \neq \Phi \Longrightarrow Cn\, X = NCn^{-1}ANX$.

Prawdziwe jest również następujące metatwierdzenie (zob. pracę [5])[4].

(I). Wstawiając w aksjomatach A2-A5 zamiast symbolu Cn wszędzie symbol $Cn^{-1}$ otrzymujemy zdania będące twierdzeniami teorii zdań odrzuconych.

Podam najpierw kilka podstawowych twierdzeń o niesprzeczności, niesprzeczności ze względu na odrzucanie, zupełności oraz zupełności ze względu na odrzucanie.
W dowodach dwóch pierwszych twierdzeń korzysta się z następującego lematu, którego łatwy dowód pomijamy:

L1. $nx \in S \Longrightarrow x \in S$.

T1. $X \in Nsp \Longleftrightarrow NCn\, X \subset (Cn\, X)'$.

---

[4] Zauważę, że podany w pracy [5] dowód metatwierdzenia (I) oparty jest na aksjomatach ogólnej teorii systemów dedukcyjnych Tarskiego [7].

Zbiór jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie klasy jego konsekwencji jest nadzbiorem negacji tej klasy.

D o w ó d. Przyjmijmy najpierw, że $NCn\,X \subset (Cn\,X)'$ i załóżmy niewprost, że $X \notin Nsp$. Stąd wobec $T3^T$ istnieje takie $x_1$, że $x_1$, $nx_1 \in Cn\,X$. Na mocy $T2^T a$ i D3 otrzymujemy wtedy $x_1 \in NCn\,X$. Uwzględniając założenie otrzymujemy tym samym, że $x_1 \in (Cn\,X)'$, a więc $x_1 \notin Cn\,X$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem $x_1 \in CnX$. Przyjmijmy z kolei, że $X \in Nsp$ i załóżmy dla dowodu, że $x \in NCn\,X$. Stąd wobec D3 i $T2^T a$ $nx \in Cn\,X$. Z ostatniego wzoru na mocy A2 i L1 $x \in S$, skąd wobec założenia i $T3^T$ otrzymujemy $x \notin Cn\,X \vee nx \notin Cn\,X$. Ponieważ jednak $nx \in Cn\,X$, zatem $x \notin Cn\,X$, czyli $x \in (Cn\,X)'$. W ten sposób wykazaliśmy, że $NCn\,X \in (Cn\,X)'$, co kończy dowód.

Odpowiednikiem twierdzenia T1 dla zbiorów niesprzecznych ze względu na odrzucanie jest twierdzenie:

T2. $X \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow NCn^{-1}X \in (Cn^{-1}X)'$.

Twierdzenie to wynika z D3, D4.2, (I), $T2^T b$ i L1. Dowód jest analogiczny do dowodu T1.

Z twierdzeń T1 i T2 wynika łatwo:

T3a. $X \in Nsp \Longleftrightarrow Cn\,X \cap NCn\,X = \Phi$,

b. $X \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow Cn^{-1}X \cap NCn^{-1}\,X = \Phi$.

Widzimy więc, że dowolny system (dowolny system ze względu na odrzucanie) jest niesprzeczny (jest niesprzeczny ze względu na odrzucanie) wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada elementów wspólnych ze swoją negacją.

T4. $X \in Zpł \Longleftrightarrow (Cn\,X)' \subset NCn\,X$.

zbiór jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie klasy jego konsekwencji jest podzbiorem negacji tej klasy.

D o w ó d. Przyjmijmy, że $(Cn\ X)' \subset NCn\ X$ i załóżmy niewprost, że $X \notin Zpł$. W takim razie wobec $T4^T$ istnieje takie $x_1 \in S$, że $x_1 \notin Cn\ X$ i $nx_1 \notin Cn\ X$, skąd $x_1 \in (Cn\ X)'$. Z ostatniego wzoru i z założenia wynika, że $x_1 \in N\ Cn\ X$. Wobec D3 i $T2^T a$ mamy więc $nx_1 \in Cn\ X$, co jest sprzeczne ze wzorem $nx_1 \notin Cn\ X$. Niech z kolei $X \in Zpł$ i załóżmy dla dowodu, że $x \in (Cn\ X)'$. Tym samym $x \in S$ i $x \notin Cn\ X$, co wobec założenia i $T4^T$ daje wzór $nx \in Cn\ X$. Uwzględniając z kolei D3 i $T2^T a$ otrzymujemy $x \in NCn\ X$. Wykazaliśmy więc, że $(Cn\ X)' \subset NCn\ X$, co kończy dowód.

Odpowiednikiem T4 dla zbiorów zupełnych ze względu na odrzucanie jest twierdzenie:

$$T5. \quad X \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow (Cn^{-1}X)' \subset NCn^{-1}X.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu T4 i opiera się na D3, D5.2 i $T2^T b$. Z twierdzeń T4 i T5 wynika, że dowolny system (dowolny system ze względu na odrzucanie) jest zupełny (jest zupełny ze względu na odrzucanie) wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie zawiera się w jego negacji.

Uwzględniając T1, T2, T4 i T5 otrzymujemy:

$$T6a. \quad X \in Nsp \cap Zpł \Longleftrightarrow NCn\ X = (Cn\ X)',$$

$$b. \quad X \in Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1} \Longleftrightarrow NCn^{-1}X = (Cn^{-1}X)'.$$

Dowolny system (dowolny system ze względu na odrzucanie) jest więc niesprzeczny i zupełny (niesprzeczny ze względu na odrzucanie i zupełny ze względu na odrzucanie) wtedy i tylko wtedy, gdy jego negacja równa jest jego dopełnieniu. Łatwo wykazać również, że dowolny system niesprzeczny (dowolny system ze względu na odrzucanie niesprzeczny ze względu na odrzucanie) nie jest zupełny (nie jest zupełny ze względu na odrzucanie) wtedy i tylko wtedy, gdy jego negacja jest podzbiorem właściwym jego dopełnienia.

Dalsze twierdzenia dotyczące zbiorów niesprzecznych oraz zbiorów zupełnych poprzedzimy następującymi lematami:

L2a. $Cn\ X = NN\ Cn\ X$,

b. $Cn^{-1}X = NNCn^{-1}X$.

Lemat ten wynika z $T2^{T}c$, d i definicji D3.

L3a. $X \neq \Phi \Longrightarrow Cn^{-1}ANX = NCn\ X$,

b. $X \neq \Phi \Longrightarrow Cn^{-1}AX = NCn\ NX$,

c. $X \neq \Phi \Longrightarrow NCn^{-1}AX = Cn\ NX$.

Lemat L3a wynika z $T8^{T}b$, $T1^{T}a$ i L2b, lemat L3b wynika z L3a, D3 i $T8^{T}a$, zaś lemat L3c wynika z L3b, $T1^{T}a$ i L2a.

T7a. $X \neq \Phi \Longrightarrow (X \in Nsp \Longleftrightarrow Cn^{-1}ANX \subset (Cn\ X)')$,

b. $X \neq \Phi \Longrightarrow (X \in Zpł \Longleftrightarrow (Cn\ X)' \subset Cn^{-1}ANX)$,

c. $X \neq \Phi \Longrightarrow (X \in Nsp \cap Zpł \Longleftrightarrow (Cn\ X)' = Cn^{-1}ANX)$.

Twierdzenie to wynika natychmiast z L3a, T1, T4 i T6a[5].

T8a. $X \neq \Phi \Longrightarrow (AX \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow Cn\ NX \cap Cn^{-1}AX = \Phi)$.

---

[5] Inny dowód twierdzenia T7a znaleźć można w pracy [8].

b. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (AX \in Zp\ell^{-1} \Longleftrightarrow (Cn\ NX)' \subset Cn^{-1}AX)$,

c. $X \neq \emptyset \Longrightarrow (AX \in Nsp^{-1} \cap Zp\ell^{-1} \Longleftrightarrow (Cn\ NX)' = Cn^{-1}AX)$.

Powyższe twierdzenie otrzymujemy na podstawie T3b, T5, T6b i L3c.

Zbadamy z kolei rodzinę systemów ze względu na odrzucanie. Łatwo zauważyć, że do rodziny tej należą zbiory $\emptyset$ i S oraz klasa zdań odrzuconych ze względu na zdania dowolnego zbioru. Wobec T7$^T$ oraz wzoru $Cn\ X \in Syst$ systemem ze względu na odrzucanie jest negacja klasy konsekwencji dowolnego zbioru tj.

L4. $NCn\ X \in Syst^{-1}$.

Wykażemy, że do rodziny systemów ze względu na odrzucanie należą również dopełnienie klasy konsekwencji dowolnego zbioru oraz dopełnienie negacji klasy zdań odrzuconych ze względu na zdania zbioru alternatyw dowolnego zbioru tj.

T9a. $(Cn\ X)' \in Syst^{-1}$,

b. $(NCn^{-1}AX)' \in Syst^{-1}$.

D o w ó d. Dla dowodu T9a załóżmy, że $x \in Cn^{-1}(Cn\ X)'$. W takim razie wobec D1 istnieje takie $x_1$, że $x_1 \in (Cn\ X)'$ i $x_1 \in Cn\{x\}$, skąd $x_1 \notin Cn\ X$. Przypuśćmy na chwilę, że $x \in Cn\ X$. Wtedy wobec A3 i A4 $Cn\{x\} \subset Cn\ X$, ponieważ jednak $x_1 \in Cn\{x\}$, zatem $x_1 \in Cn\ X$, co jest sprzeczne ze wzorem $x_1 \notin Cn\ X$. Wykazaliśmy tym samym, że $x \notin Cn\ X$, czyli, że $x \in (Cn\ X)'$. Zachodzi więc inkluzja $Cn^{-1}(Cn\ X)' \subset (Cn\ X)'$, co wobec D6.2 kończy dowód.
Twierdzenie T9b jest oczywiste w przypadku, gdy $X = \emptyset$; w przypadku, gdy $X \neq \emptyset$ wynika ono z L3c i T9a.

Z twierdzenia T9a otrzymujemy następujący wniosek:

W1. $X \in Syst \Longrightarrow X' \in Syst^{-1}$.

Widzimy więc, że zarówno negacja (zob. $T7^T$) jak i dopełnienie dowolnego systemu są systemami ze względu na odrzucanie. Przypomnijmy, że negacja i dopełnienie systemu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy system ten jest zbiorem niesprzecznym i zupełnym.

L5a. $NS = S$,

b. $N X' = (N X)'$.

Lemat L5a wynika z L1, $T2^T$a, A9, D3 i wzoru $Cn\ S = S$, lemat L5b wynika z L5a i $T1^T$b.

Możemy teraz dzięki T9a sformułować następujące własności zbiorów niesprzecznych, zbiorów zupełnych oraz zbiorów niesprzecznych i zupełnych:

T10. $X \in Nsp \Longleftrightarrow (Cn\ X)' \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow NCn\ X \in Nsp^{-1}$.

D o w ó d. Na mocy T5, T9a, L5b i T1 otrzymujemy następujące równoważności:

$$(Cn\ X)' \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow (Cn^{-1}(Cn\ X)')' \subset NCn^{-1}(Cn\ X)' \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ((Cn\ X)')' \subset N(Cn\ X)' \Longleftrightarrow Cn\ X \subset N(Cn\ X)' \Longleftrightarrow \tag{a}$$
$$\Longleftrightarrow Cn\ X \subset (N\ Cn\ X)' \Longleftrightarrow NCn\ X \subset (Cn\ X)' \Longleftrightarrow X \in Nsp,$$

natomiast na mocy T2, L4, L2a i T1 otrzymujemy:

$$NCn\ X \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow NCn^{-1}NCn\ X \subset (Cn^{-1}NCn\ X)' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow NNCn\ X \subset (NCn\ X)' \Longleftrightarrow Cn\ X \subset (NCn\ X)' \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow NCn\ X \subset (Cn\ X)' \Longleftrightarrow X \in Nsp. \qquad (b)$$

Twierdzenie wynika natychmiast ze wzorów (a) i (b).

T11. $X \in Zpł \Longleftrightarrow (Cn\ X)' \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow NCn\ X \in Zpł^{-1}$.

D o w ó d. Na podstawie T2, T9a, L5b i T4 otrzymujemy:

$$(Cn\ X)' \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow NCn^{-1}(Cn\ X)' \subset (Cn^{-1}(Cn\ X)')' \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow N(Cn\ X)' \subset ((Cn\ X)')' \Longleftrightarrow N(Cn\ X)' \subset Cn\ X \Longleftrightarrow \qquad (c)$$
$$\Longleftrightarrow (NCn\ X)' \subset Cn\ X \Longleftrightarrow (Cn\ X)' \subset NCn\ X \Longleftrightarrow X \in Zpł,$$

natomiast na mocy T5, L4, L2a i T4 mamy:

$$NCn\ X \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow (Cn^{-1}NCn\ X)' \subset NCn^{-1}NCn\ X \Longleftrightarrow \qquad (d)$$
$$\Longleftrightarrow (NCn\ X)' \subset NNCn\ X \Longleftrightarrow (NCn\ X)' \subset Cn\ X \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (Cn\ X)' \subset NCn\ X \Longleftrightarrow X \in Zpł.$$

Twierdzenie T11 wynika natychmiast ze wzorów (c) i (d).

T12. $X \in Nsp \cap Zpł \Longleftrightarrow (Cn\ X)' \in Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow N\ Cn\ X \in Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1}$.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z T10 i T11.

Z twierdzenia T10 wynika, że dowolny system jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem zupełnym ze względu na odrzucanie (jego negacja jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie), natomiast z T11 wynika, że dowolny system jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie (jego negacja jest zbiorem zupełnym ze względu na odrzucanie), wreszcie z T12 wynika, że dowolny system jest niesprzeczny i zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie (jego negacja) jest zbiorem niesprzecznym ze względu na odrzucanie i zupełnym ze względu na odrzucanie.

Zauważmy, że z $T5^T$, T12 i W1 wynika następujące twierdzenie:

$$\text{T13.} \quad X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_{Y \supset X} (Y' \in Syst^{-1} \cap Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1}).$$

Można wykazać, że na gruncie T6b, $T1^Ta$, L2b, L5b i wzoru $X \in Syst^{-1} \Longrightarrow Cn^{-1}X = X$ twierdzenie T13 jest równoważne następującemu twierdzeniu podanemu w pracy [8]:

$$T9^T. \quad X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_{Y} (NX \subset Y \wedge Y \in Syst^{-1} \cap Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1}).$$

Podamy obecnie dwa twierdzenia dotyczące aksjomatyzowalności zbiorów ze względu na odrzucanie:

$$\text{T14.} \quad Y \in Aks\ X \wedge Y \neq \Phi \Longrightarrow ANY \in Aks^{-1}NCn\ X.$$

D o w ó d. Załóżmy, że $Y \in Aks\ X$ i $Y \neq \Phi$. Stąd na mocy D8.1 i D7.1 $Y$ jest skończonym podzbiorem zbioru $X$ i $Cn\ Y = Cn\ X$. Korzystając z ostatniego wzoru oraz $T1^Ta$, L3a, L4 i założenia $Y \neq \Phi$ otrzymujemy kolejno:

$$NCn\ Y = NCn\ X,$$

$$Cn^{-1}ANY = NCn\ X, \tag{1}$$

$$Cn^{-1}ANY = Cn^{-1}NCn\ X. \tag{2}$$

definicji D3, D11 i wzoru $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ wynika ponadto:

$$\overline{\overline{ANY}} < \aleph_0 \tag{3}$$

Ponieważ wobec metatwierdzenia (I) $ANY \subset Cn^{-1} ANY$, zatem uwzględniając wzór (1) otrzymujemy:

$$ANY \subset NCn\, X. \tag{4}$$

Teza twierdzenia jest natychmiastowym wnioskiem ze wzorów (2),(3), (4) i definicji D7.2, D8.2.

Twierdzenie T14 może mieć zastosowanie przy wyznaczaniu układu aksjomatów odrzuconych dla negacji klasy konsekwencji dowolnego zbioru aksjomatyzowalnego.

T15. $X \in Nsp \cap Zpł \wedge Y \in Akc\, X \wedge Y \neq \emptyset \Longrightarrow ANY \in Aks^{-1}(Cn\, X)'$.

Zbiór $ANY$ jest układem aksjomatów odrzuconych dla dopełnienia klasy konsekwencji pewnego zbioru niesprzecznego i zupełnego, o ile zbiór $Y$ jest niepustym układem aksjomatów dla rozpatrywanego zbioru.

Twierdzenie T15 wynika z T14 i T6a.

Widzimy więc, że dowolny niesprzeczny i zupełny zbiór aksjomatyzowalny ma tę własność, że dopełnienie klasy jego konsekwencji jest zbiorem aksjomatyzowalnym ze względu na odrzucanie.

Teorię zdań odrzuconych wzbogacimy o następującą definicję:

D12. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn\, X = (Cn^{-1} Y)'$.

Wyrażenie $X \varrho Y$ czytamy: zbiory $X$, $Y$ tworzą pełną parę zbiorów. Bezpośrednim wnioskiem z D12 jest twierdzenie:

T16. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn\, X \cap Cn^{-1} Y = \emptyset \wedge Cn\, X \cup Cn^{-1} Y = S$.

Zbiory $X$, $Y$ tworzą więc pełną parę zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy klasa konsekwencji zbioru $X$ i klasą zdań odrzuconych ze względu na zdania zbioru $Y$ są zbiorami rozłącznymi o tej własności, że dowolne zdanie należy do jednej z tych klas.

O ile założymy, że zbiór $P$ ($P \subset S$) wszystkich zdań prawdziwych jest systemem, to łatwo udowodnimy dwie następujące implikacje:

$$X \subset P \Longrightarrow Cn\, X \subset P,$$

$$X \subset P' \Longrightarrow Cn^{-1} X \subset P'.$$

Niech $X \subset P$, $Y \subset P'$ i $X \varrho Y$. Wtedy z twierdzenia T16 wynika, że:

$$Cn\, X = P \quad \text{i} \quad Cn^{-1} Y = P'.$$

Opierając się na definicji D12 i uwzględniając A2, A4 i metatwierdzenie (J) otrzymujemy:

T17a. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn\, X \varrho Y,$

b. $X \varrho Y \Longleftrightarrow X \varrho Cn^{-1} Y,$

c. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn\, X \varrho Cn^{-1} Y.$

Na podstawie D12, T9a i wzoru $A = B' \Longleftrightarrow B = A'$ otrzymujemy ponadto:

T18a. $X \varrho Y \Longleftrightarrow (Cn\, X)' = Cn^{-1} Y,$

b. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn^{-1}(Cn\, X)' = Cn^{-1} Y.$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi również:

T19a. $X \in Syst \wedge Y \in Syst^{-1} \Longrightarrow (X \varrho Y \Longleftrightarrow X' = Y),$

b. $X, Y \in Syst \Longrightarrow (X \varrho NY \Longleftrightarrow X' = NY)$.

Bezpośrednim wnioskiem z T18b jest twierdzenie:

T20. $X \varrho (Cn\ X)'$.

Widzimy więc, że dowolny system i jego dopełnienie tworzą pełną parę zbiorów.

T21. $Y \cap Cn\ \Phi \neq \Phi \Longrightarrow \sim(X \varrho Y)$.

**Żaden zbiór i zbiór zawierający tezę logiczną nie tworzą pełnej pary zbiorów.**

D o w ó d. Załóżmy, że $Y \cap Cn\ \Phi \neq \Phi$. W takim razie istnieje takie $x_1$, że $x_1 \in Y$ i $x_1 \in Cn\Phi$. Stąd wobec $T6^T$ $Cn^{-1}\{x_1\} = S$, zaś wobec metatwierdzenia (I) $Cn^{-1}\{x_1\} \subset Cn^{-1}Y$. Z dwóch ostatnich wzorów wynika, że $Cn^{-1}Y = S$. Ponieważ $x_1 \in Cn\ \Phi$ i $Cn\ \Phi \subset Cn\ X$ dla dowolnego $X \subset S$, zatem $x_1 \in Cn\ X$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $Cn\ X \cap Cn^{-1}Y \neq \Phi$, skąd na mocy T16 $\sim(X \varrho Y)$.

T22a. $X \varrho \Phi \Longleftrightarrow X \notin Nsp$,

b. $X \notin Nsp \wedge Y \neq \Phi \Longrightarrow \sim(X \varrho Y)$.

Łatwy dowód tego twierdzenia pomijamy.

T23. $X \varrho NX \Longrightarrow X \in Zpł$.

Dowolny zbiór tworzący ze swoją negacją pełną parę zbiorów jest zbiorem zupełnym.

D o w ó d. Załóżmy, że $X \varrho NX$. Stąd i T18a wynika, że

$$Cn^{-1}NX = (Cn\ X)'. \tag{1}$$

Na podstawie wzoru $Cn^{-1}AN\Phi = \Phi$ i lematu L3a otrzymujemy

$$Cn^{-1}ANX \subset NCn\ X. \tag{2}$$

Z definicji D11 i metatwierdzenia (I) wynika ponadto, że

$$Cn^{-1}NX \subset Cn^{-1}ANX. \tag{3}$$

Uwzględniając wzory (1), (2) i (3) mamy $(Cn\ X)' \subset N\ Cn\ X$, skąd na mocy T4 $X \in Zpł$.

T24. $X \varrho NCn\ X \Longleftrightarrow X \in Nsp \cap Zpł$.

D o w ó d. Przyjmijmy najpierw, że $X \varrho NCn\ X$. Stąd i T18a wynika, że $(Cn\ X)' = Cn^{-1}NCn\ X$, co z kolei na mocy L4 daje wzór $(Cn\ X)' = NCn\ X$. Tym samym wobec T6a $X \in Nsp \cap Zpł$. Załóżmy z kolei, że $X \in Nsp \cap Zpł$. Z twierdzenia T6a wynika wtedy, że $NCn\ X = (Cn\ X)'$, skąd wobec T20 $X \varrho NCn\ X$, co kończy dowód.

Z twierdzenia T24 wynika, że dowolny system i jego negacja tworzą pełną parę zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy system ten jest zbiorem niesprzecznym i zupełnym.

Korzystając z T24 i twierdzenia Lindenbauma o nadsystemach (zob. $T5^T$) otrzymujemy

T25. $X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_{Y} (X \subset Y \wedge Y \varrho NY)$.

Dla dowolnego zbioru niesprzecznego istnieje nadsystem, który ze swoją negacją tworzy pełną parę zbiorów.

BIBLIOGRAFIA

[1] W.A. Pogorzelski - Adekwatność teorii systemów dedukcyjnych względem rachunków zdaniowych. Studia Logica, t. XIII (1962), s. 103-131.

[2] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach. Cz. I. Studia Logica, t. IX (1960), s. 163-176.

[3] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach. Cz. II. Studia Logica, t. X (1960), s. 77-95.

[4] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - O dowodzie matematycznym, Warszawa 1962.

[5] J. Słupecki - Funkcja Łukasiewicza. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego, Matematyka-Fizyka-Astronomia-II, Seria B, Nr 3 (1959), s. 33-40.

[6] A. Tarski - Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl.III, vol. 23 (1930), pp. 22-29.

[7] A. Tarski - Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII Band, Leipzig (1930), pp. 361-404.

[8] U. Wybraniec-Skardowska - Teoria zdań odrzuconych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu, Seria B; Monografie, Nr 22 (1968), s. 5-132.

Praca wpłynęła dnia 15 maja 1967 r.

## SOME SUPPLEMENTS OF THEORY OF REJECTED SENTENCES

### Summary

This paper corresponds to J. Słupecki and U. Wybraniec-Skardowska's investigations in the theory of rejected sentences (see [5], [8]).

In this paper some supplements of this theory are given concerning properties of: consistent sets, consistent with respect to rejection, complete sets, complete with respect to rejection, axiomatizable sets, the sets which are axiomatizable with respect to rejection, the systems and the systems with respect to rejection.

Some more important theorems are:

1. $X \in Nsp \cap Zpł \Longleftrightarrow NCn\, X = (Cn\, X)'$,

2. $X \in Nsp^{-1} \cap Zpł^{-1} \Longleftrightarrow NCn^{-1}X = (Cn^{-1}X)'$,

3. $(Cn\, X)'$, $(NCn^{-1}AX)' \in Syst^{-1}$.

4. The following formulae are equivalent:

   a. $X \in Nsp$,

   b. $(Cn\, X)' \in Zpł^{-1}$,

   c. $NCn\, X \in Nsp^{-1}$,

   d. $NCn\, X \subset (Cn\, X)'$.

5. The following formulae are equivalent:

   a. $X \in Zpł$,

   b. $(Cn\, X)' \in Nsp^{-1}$,

   c. $NCn\, X \in Zpł^{-1}$,

   d. $(Cn\, X)' \subset NCn\, X$.

Thus, a set $X$ is consistent if and only if the complement of the set $Cn\, X$ is a complete set with respect to rejection (the negation of the set $Cn\, X$ is a consistent set with respect to rejection); a set X is complete if and only if the complement of the set Cn X is a consistent set with respect to rejection (the negation of the set Cn X is a complete set with respect to rejection).

The following two theorems concern the axiomatizability of sets with respect to rejection.

6. $Y \in \mathrm{Aks}\, X \wedge Y \neq \emptyset \Longrightarrow ANY \in \mathrm{Aks}^{-1} NCn\, X,$

7. $Y \in \mathrm{Aks}\, X \wedge Y \neq \emptyset \wedge X \in \mathrm{Nsp} \cap \mathrm{Zpł} \Longrightarrow ANY \in \mathrm{Aks}^{-1} (Cn\, X)'.$

Thus, for every axiomatizable set X and for every consistent, complete and axiomatizable set Z, the negation of the set Cn X and the complement of the set Cn Z belong to the set of the axiomatizable sets with respect to rejection.

The theory of rejected sentences can be enriched by the following definition:

D12. $X \varrho Y \Longleftrightarrow Cn\, X = (Cn^{-1} Y)'.$

The expression $X \varrho Y$ reads: sets X and Y create a full pair of sets.

Thus, sets X and Y create a full pair of sets if and only if the set Cn X and the set $Cn^{-1} Y$ are disjoint and their union is equal S. It is proved, that:

8. $X \varrho (Cn\, X)',$

9. $X \varrho NCn\, X \Longleftrightarrow X \in \mathrm{Nsp} \cap \mathrm{Zpł},$

10. $X \in \mathrm{Nsp} \Longrightarrow \bigvee_{Y} (X \subset Y \wedge Y \varrho NY).$

# НЕСКОЛЬКО ПОПОЛНЕНИЙ К ТЕОРИИ ОТБРАСЫВАЕМЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

## Резюме

Работа примыкает к исследованиям Е. Слупецкого и У. Выбранец-Скардовской касающимся теории отбрасываемых предложений.

В работе приводится несколько пополнений этой теории, которые относятся к свойствам множеств: непротиворечивых, непротиворечивых относительно отбрасывания, (дедуктивно) полных, (дедуктивно) полных относительно отбрасывания, аксиоматизируемых, аксиоматизируемых относительно отбрасывания, (дедуктивных) систем и (дедуктивных) систем относительно отбрасывания.

Вот важнейшие из доказанных теорем:

1. $X \in Nsp \cap Zp\ell \iff NCnX = (CnX)'$,

2. $X \in Nsp^{-1} \cap Zp\ell^{-1} \iff NCn^{-1}X = (Cn^{-1}X)'$,

3. $(CnX)'$, $(NCn^{-1}AX)' \in Syst^{-1}$.

4. Равносильны следующие выражения:

   a. $X \in Nsp$,

   b. $(CnX)' \in Zp\ell^{-1}$,

   c. $NCn\,X \in Nsp^{-1}$,

   d. $NCn\,X \subset (Cn\,X)'$.

5. Равносильны следующие выражения:

   a. $X \in Zp\ell$,

   b. $(CnX)' \in Nsp^{-1}$,

   c. $NCn\,X \in Zp\ell^{-1}$,

   d. $(Cn\,X)' \subset NCn\,X$.

Таким образом множество непротиворечиво тогда и только тогда, когда дополнение класса ево консеквенций является множеством (дедуктивно) полным относительно отбрасывания (отрицание класса его консеквенций является множеством непротиворечивым относительно отбрасывания); множество является (дедуктивно) полным тогда и только тогда, когда дополнение класса его консеквенций является множеством непротиворечивым относительно отбрасывания (отрицание класса его консеквенций является множеством (дедуктивно) полным относительно отбрасывания).

Следующие две теоремы касаются вопроса об аксиоматизируемости множеотв относительно отбрасывания:

6. $Y \in \mathrm{Aks}\, X \ \wedge \ Y \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{ANY} \in \mathrm{Aks}^{-1}\mathrm{NCn}X,$

7. $Y \in \mathrm{Aks}\, X \ \wedge \ Y \neq \emptyset \wedge X \in \mathrm{Nsp} \cap \mathrm{Zpł} \Longrightarrow \mathrm{ANY} \in \mathrm{Aks}^{-1}(\mathrm{Cn}X)'$

Таким образом отрицание класса консеквенций любого аксиоматизируемого множества а также дополнение класса консеквенций любого непротиворечивого (дедуктивно) полного аксиоматизируемого множества являются множествами аксиоматизируемыми относительно отбрасывания.

Теория отбрасываемых предложений обогащается здесь следующим определением:

D12. $X \varrho Y \Longleftrightarrow \mathrm{Cn}\, X = (\mathrm{Cn}^{-1}Y)'.$

Выражение $X \varrho Y$ читается: множества X, Y становят полную пару множеств. Множества X и Y становят полную пару тогда и только тогда, когда класс консеквенций множества X и класс предложений отбрасываемых относительно предложений из множества Y являются такими непересекающимися множествами, что любое предложение принадлежит в точности к одному из этих классов.

Между прочим доказывается, что:

8. $X \varrho (CnX)'$,

9. $X \varrho NCn\, X \Longleftrightarrow X \in Nsp \cap Zpł$,

10. $X \in Nsp \Longrightarrow \bigvee_{Y} (X \subset Y \wedge Y \varrho NY)$.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W OPOLU

Nr 22 Seria B: MONOGRAFIE 1968

Grzegorz Bryll

# ZWIĄZKI LOGICZNE POMIĘDZY ZDANIAMI NAUK EMPIRYCZNYCH

## W s t ę p

Praca niniejsza stanowi próbę formalizacji pewnych zagadnień metodologii nauk empirycznych i pozostaje w ścisłym związku z badaniami nad pojęciem zdania odrzuconego. Pojęcie to, wprowadzone przez Łukasiewicza i rozpatrywane początkowo w obrębie sylogistyki Arystotelesa (zob. Łukasiewicz [3-5], Słupecki [10]) i niektórych rachunków zdaniowych (Łukasiewicz [6]), zostało z czasem istotnie uogólnione. J. Słupecki [11] przeniósł pojęcie zdania odrzuconego na grunt ogólnej teorii systemów dedukcyjnych Tarskiego [14] definiując funkcję, którą nazwał "funkcją Łukasiewicza" i która dowolnemu podzbiorowi zbioru wszystkich zdań pewnego ustalonego języka przyporządkowuje zbiór zdań odrzuconych ze względu na zdania tego podzbioru. W pracy [11] ustala się podstawowe własności wspomnianej funkcji. Wykorzystanie koncepcji "odrzucania" w pracy [12] pozwoliło na podanie prostego i krótkiego dowodu twierdzenia Gödla o pełności węższego rachunku funkcyjnego.

Dalsze badania nad pojęciem zdania odrzuconego, wykonywane pod kierunkiem prof. dr J. Słupeckiego przez U. Wybraniec-Skardowską i G. Brylla, doprowadziły do skonstruowania teorii zdań odrzuconych [18] oraz umożliwiły formalizację niektórych fragmentów języka specyficznego dla nauk empirycznych. Praca niniejsza nawiązuje przede wszystkim do wyników podanych w pracy [18] i stanowi rozszerzenie przedstawionego tam systemu aksjomatycznego przez wzbogacenie jego aksjomatyki i języka.

Pragnę w tym miejscu wyrazić Panu Profesorowi Doktorowi JERZEMU SŁUPECKIEMU prawdziwą wdzięczność za ukierunkowanie moich zainteresowań naukowych, za sformułowanie tematu pracy, za systematyczną pomoc i opiekę oraz za wiele cennych rad i pouczeń udzielanych mi w czasie przygotowywania niniejszej rozprawy.

Wyrazy wdzięczności składam również Uczestnikom seminarium we Wrocławiu za cenne uwagi w dyskusji nad moim referatem. Dziękuję bardzo Pani Doktor Urszuli Wybraniec-Skardowskiej za zapoznanie mnie z własnymi wynikami i za udostępnienie rękopisu rozprawy doktorskiej.

* * *

Podaję częściowo zmodyfikowany układ aksjomatów teorii systemów dedukcyjnych zbudowanej przez A. Tarskiego [15]:

$A1^T$. $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$,

$A2^T$. $X \subset Cn\, X \subset S$,

$A3^T$. $X \subset Y \Longrightarrow Cn\, X \subset Cn\, Y$,

$A4^T$. $Cn\, Cn\, X \subset Cn\, X$,

$A5^T$. $x \in Cn\, X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn\, Y)$,

$A6^T$. $cxy \in Cn\, X \Longleftrightarrow y \in Cn\, (X \cup \{x\})$,

$A7^T$. $Cn\{x, nx\} = S$,

$A8^T$. $Cn\{x\} \cap Cn\, \{nx\} = Cn\, \Phi$,

$A9^T$. $nx,\ cxy \in S,$

$A10^T$. $nx = ny \Longrightarrow x = y$ [1].

Symbol $S$ interpretuję jako zbiór wszystkich zdań dowolnego lecz ustalonego języka. Zmienne $x, y, z, \ldots$ przebiegają zbiór $S$, zmienne $X, Y, Z, \ldots$ przebiegają rodzinę wszystkich podzbiorów tego zbioru. Zbiór $Cn\,X$ interpretuję jako zbiór wszystkich zdań mających dowód na gruncie zdań należących do $X$ i reguł logiki klasycznej [7] (zob. także [8, 9]). Wyrażenia $cxy$ i $nx$ są odpowiednio nazwami implikacji o poprzedniku $x$ i następniku $y$ oraz negacji zdania $x$.

Powtórzę najważniejsze definicje teorii Tarskiego:

$D1^T$. $X \in Nsp \Longleftrightarrow Cn\,X \neq S,$

$D2^T$. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \notin Cn\,X} X \cup \{x\} \notin Nsp,$

$D3^T$. $X \in Nzl \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} x \notin Cn\,(X \setminus \{x\}),$

$D4^T$. $X \in Syst \Longleftrightarrow Cn\,X \subset X,$

$D5^T$. $X \approx Y \Longleftrightarrow Cn\,X = Cn\,Y,$

$D6^T$. $X \in Aks \Longleftrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge X \approx Y).$

Symbole Syst, Nsp, Zpł, Nzl, Aks, $\approx$ oznaczają odpowiednio zbiór wszystkich systemów, rodzinę wszystkich zbiorów niesprzecznych,

---

[1] Aksjomat $A10^T$ dołączony został do aksjomatyki Tarskiego przez U. Wybraniec-Skardowską (zob. [18]).

zupełnych, niezależnych, aksjomatyzowalnych, relację równoważności dwóch zbiorów.

Szczególnie istotną rolę w dalszych rozważaniach odgrywać będzie definicja zbioru zdań odrzuconych ze względu na zdania dowolnego zbioru X, która ma następującą postać[2]:

$$D7^T. \quad x \in Cn^{-1}X \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} y \in Cn\{x\}.$$

Przyjmując, że zbiór X jest zbiorem zdań prawdziwych i zakładając, że zbiór wszystkich zdań prawdziwych jest systemem, można w oparciu o podane wyżej aksjomaty wykazać, że do zbioru Cn X należą tylko zdania prawdziwe. Przyjmując natomiast, że X jest zbiorem wyłącznie zdań fałszywych wnioskujemy, że również zbiór $Cn^{-1}X$ jest zbiorem zdań fałszywych. Posłużyliśmy się tutaj pojęciem zbioru wszystkich zdań prawdziwych, które nie może być zdefiniowane w teorii Tarskiego. Pojęcie to należałoby więc zaliczyć do pojęć pierwotnych tej teorii. Również założenie, że zbiór wszystkich zdań prawdziwych jest systemem, należałoby zaliczyć do aksjomatów. Nie czynimy tak, gdyż w dalszych rozważaniach nie będziemy badać własności pojęcia zbioru wszystkich zdań prawdziwych. Zauważmy, że zbiór wszystkich zdań fałszywych jest dopełnieniem zbioru wszystkich zdań prawdziwych do zbioru S.

W pracy [11] wykazano, że zdania otrzymane z aksjomatów $A2^T$–$A5^T$ przez zastąpienie symbolu Cn symbolem $Cn^{-1}$ są twierdzeniami teorii Tarskiego wzbogaconej o definicję $D7^T$.

2) Doc. dr W.A. Pogorzelski zwrócił mi uwagę, że właściwsze byłoby nazwanie zbioru $Cn^{-1}X$ zbiorem zdań odrzucalnych na podstawie zdań zbioru X, a nie zdań odrzuconych. Pozostawiam termin "zbiór zdań odrzuconych", gdyż ma on w literaturze polskiej pewne tradycje.

Pojęcia $Nzl^{-1}$, $Syst^{-1}$, $\approx^{-1}$, $Aks^{-1}$ mają definicje analogiczne do definicji $D3^T$-$D6^T$:

$$D8^T. \quad X \in Nzl^{-1} \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} x \notin Cn^{-1}(X \setminus \{x\}),$$

$$D9^T. \quad X \in Syst^{-1} \Longleftrightarrow Cn^{-1}X \subset X,$$

$$D10^T. \quad X \approx^{-1} Y \Longleftrightarrow Cn^{-1}X = Cn^{-1}Y,$$

$$D11^T. \quad X \in Aks^{-1} \Longleftrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge X \approx^{-1} Y).$$

Natomiast pojęcia $Nsp^{-1}$ i $Zpł^{-1}$ zostały w pracy [18] zdefiniowane następująco:

$$D12^T. \quad X \in Nsp^{-1} \Longleftrightarrow \sim \bigvee_{x} (x, nx \in Cn^{-1}X),$$

$$D13^T. \quad X \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in Cn^{-1}X \vee nx \in Cn^{-1}X).$$

Odstępstwo od analogii pomiędzy $D1^T$ i $D12^T$ oraz $D2^T$ i $D13^T$ uzasadnione jest względami intuicyjnymi.

Symbole $Syst^{-1}$, $Nsp^{-1}$, $Zpł^{-1}$, $Nzl^{-1}$, $Aks^{-1}$, $\approx^{-1}$ oznaczają odpowiednio zbiór wszystkich systemów ze względu na odrzucanie, rodzinę wszystkich zbiorów niesprzecznych ze względu na odrzucanie, zupełnych ze względu na odrzucanie, niezależnych ze względu na odrzucanie, aksjomatyzowalnych ze względu na odrzucanie, relację równoważności ze względu na odrzucanie dwóch zbiorów.

W pracy [18] przyjęte są ponadto następujące definicje:

$$D14^T. \quad y = \neg x \Longleftrightarrow \bigwedge_{z} (x \neq nz \wedge y = nx) \vee x = ny,$$

$$D15^T. \quad x \in NX \Longleftrightarrow \neg x \in X.$$

Wyrażenie $y = \neg x$ czytamy: $y$ jest zdaniem sprzecznym ze zdaniem $x$; zbiór $NX$ nazywamy negacją zbioru $X$.

W dalszym ciągu korzystał będę z następujących twierdzeń teorii systemów dedukcyjnych Tarskiego. Twierdzenia te zaczerpnięte są z pracy [15] (zob. także [9]).

$T1^T$a. $X \in Nsp \Longleftrightarrow \sim \bigvee_{x} (x, nx \in Cn\ X)$,

b. $X \in Nsp \wedge Y \subset X \Longrightarrow Y \in Nsp$,

c. $X \in Nsp \wedge Y \approx X \Longrightarrow Y \in Nsp$,

$T2^T$a. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in Cn\ X \vee nx \in Cn\ X)$,

b. $X \in Zpł \Longleftrightarrow \bigwedge_{Y \in Nsp} (X \subset Y \Longrightarrow X \approx Y)$,

$T3^T$a. $X \in Nzl \Longleftrightarrow \bigwedge_{Y,Z} (Y \cup Z \subset X \wedge Y \approx Z \Longrightarrow Y = Z)$,

b. $X \in Nzl \wedge Y \subset X \Longrightarrow (Y \in Aks \Longleftrightarrow \overline{\overline{Y}} < \aleph_0)$,

c. $X \in Nzl \Longrightarrow X \notin Syst$.

$T4^T$. $Cn(X \cup Cn\ Y) = Cn(X \cup Y)$.

$T5^T$a. $y \in Cn\{nx\} \Longleftrightarrow x \in Cn\{ny\}$,

b. $Cn\{nnx\} = Cn\{x\}$,

c. $\{x\} \approx \{y\} \Longleftrightarrow cxy, cyx \in Cn\Phi$.

Powołam się ponadto na następujące twierdzenia zaczerpnięte z pracy [18]:

$T6^T$a. $\neg nx = x$,

b. $\bigwedge_{z} x \neq nz \Longrightarrow \neg x = nx$.

$T7^T$a. $X \subset Y \Longleftrightarrow NX \subset NY$,

b. $nx \in NX \Longleftrightarrow x \in X$,

c. $N(X \cup Y) = NX \cup NY$.

$T8^T$a. $Cn^{-1}(X \cup Y) = Cn^{-1}X \cup Cn^{-1}Y$,

b. $X \neq \emptyset \Longrightarrow NCn\,\emptyset \subset Cn^{-1}X$.

$T9^T$a. $\{x\} \approx {}^{-1}\{y\} \Longleftrightarrow \{x\} \approx \{y\}$,

b. $\{nx\} \approx \{\neg x\}$,

c. $nx \in Cn\,X \Longleftrightarrow \neg x \in Cn\,X$.

$T10^T$a. $X \in Nzl^{-1} \Longleftrightarrow \bigwedge_{Y,Z} (Y \cup Z \subset X \wedge Y \approx {}^{-1}Z \Longrightarrow Y = Z)$,

b. $X \in Nzl^{-1} \wedge Y \subset X \Longrightarrow (Y \in Aks^{-1} \Longleftrightarrow \overline{\overline{Y}} < \aleph_0)$,

c. $X \in Nzl \Longrightarrow X \in Nzl^{-1}$.

W dowodach kilku twierdzeń skorzystam z następujących twierdzeń podanych w pracy [1]:

$T11^T$a. $X \in Nsp \Longleftrightarrow (Cn\,X)' \in Zpł^{-1} \Longleftrightarrow NCn\,X \in Nsp^{-1}$ [3],

[3] Symbol $X'$ oznacza dopełnienie zbioru $X$, tj. $X' = S \setminus X$.

b. $X \in Nsp \Longleftrightarrow Cn\,X \cap NCn\,X = \emptyset$,

c. $NCn\,X,\ (Cn\,X)' \in Syst^{-1}$.

W pracy [18] w rozdziale "Zdania empiryczne" podjęta została próba zastosowania aparatury pojęciowej teorii zdań odrzuconych do metodologii nauk empirycznych. Najważniejszym spośród wprowadzonych w tym rozdziale pojęć jest pojęcie pozytywnego zdania empirycznego. Pozytywne zdania empiryczne interpretuje U. Wybraniec-Skardowska w ten sposób, że w dowolnym z nich zdeterminowane są miejsce i czas pewnego zdarzenia. Autorka przyjmuje również, że w pozytywnych zdaniach empirycznych nie występują stałe logiczne, w szczególności pozytywne zdania empiryczne nie są negacjami żadnych zdań. Pozytywnymi zdaniami empirycznymi są na przykład zdania:

"21 grudnia 1878 roku we Lwowie urodził się Jan Łukasiewicz",

"1 kwietnia 1968 roku w Warszawie będzie widoczne zaćmienie słońca".

Pojęcie zbioru wszystkich pozytywnych zdań empirycznych zalicza U. Wybraniec-Skardowska do pojęć pierwotnych skonstruowanej przez siebie teorii. Pojęcie to oznacza symbolem $Emp^+$ i postuluje następujące jego własności:

A11$^T$. $nx \notin Emp^+$,

A12$^T$. $X \subset Emp^+ \cup NEmp^+ \wedge \sim \bigvee_x x,\ nx \in X \Longrightarrow X \in Nsp$.

Aksjomat A11$^T$ orzeka, że żadne pozytywne zdanie empiryczne nie jest negacją jakiegokolwiek zdania. Sens intuicyjny A12$^T$ zostanie omówiony nieco później.

W pracy [18] przyjęte są następujące definicje:

$D16^T$. $Emp = Emp^+ \cup NEmp^+$.

$D17^T$. $X \in Emp^* \Longleftrightarrow X \subset Emp \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X$.

Zbiór Emp nazywamy zbiorem wszystkich zdań empirycznych, zbiór $Emp^*$ nazywamy rodziną baz empirycznych. Zbiór wszystkich zdań empirycznych składa się więc ze wszystkich pozytywnych zdań empirycznych oraz wszystkich negacji tych zdań. Bazą empiryczną jest dowolny podzbiór zbioru zdań empirycznych nie zawierający zdań sprzecznych.

Aksjomat $A12^T$ możemy napisać w postaci:

$T12^T$. $Emp^* \not\subset Nsp$.

Z żadnego więc zbioru zdań empirycznych nie zawierającego jednocześnie zdania i jego negacji nie wynika żadna para zdań sprzecznych.

Następujące twierdzenie ustala najważniejsze własności zdań empirycznych i wskazuje na ich "dedukcyjną słabość" (zob. [18]):

$T13^T$. $Emp^* \subset Nsp^{-1} \cap Nzl \cap Nzl^{-1}$.

Dowolny zbiór zdań empirycznych nie zawierający pary zdań sprzecznych ma więc tę własność, że na podstawie zdań tego zbioru nie można odrzucić żadnej pary takich zdań; żadne też zdanie należące do tego zbioru nie daje się udowonić ani odrzucić na podstawie pozostałych elementów zbioru.

W pracy [18] udowodnione zostały między innymi następujące własności zdań empirycznych:

$T14^T a.\quad X \in Emp^* \Longrightarrow Cn\,X \cap Emp = Cn^{-1}X \cap Emp = X,$

$\quad b.\quad X \in Emp^* \Longrightarrow Cn\,X \cap Cn^{-1}NX = \Phi.$

$T15^T a.\quad Emp^+ \cap NEmp^+ = \Phi,$

$\quad b.\quad Emp^+, NEmp^+ \in Emp^*.$

$T16^T.\quad Emp \cap (Cn\,\Phi \cup NCn\,\Phi) = \Phi.$

$T17^T a.\quad x \in NEmp^+ \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in Emp^+} x = ny,$

$\quad b.\quad X \subset NEmp^+ \Longleftrightarrow \bigvee_{Y \subset Emp^+} X = NY,$

$\quad c.\quad X \neq \Phi \Longrightarrow \sim(NX \subset Emp^+).$

Przedstawię w niniejszej pracy system aksjomatyczny (nazywać go będę systemem $T^G$), który oprócz podanych poprzednio aksjomatów (bez aksjomatu $A12^T$) i definicji zawiera nowe aksjomaty oraz nowy termin pierwotny $\circ$ , oznaczający relację podobieństwa między zdaniami.

Relację podobieństwa rozpatruję tylko w zbiorze zdań empirycznych. Przyjmuję, że zdaniami podobnymi są zdania różniące się co najwyżej parametrami czasowo-przestrzennymi. Zdaniami podobnymi są na przykład zdania:

"16 grudnia 1966 roku w Opolu odbyło się seminarium z logiki",

"15 stycznia 1967 roku we Wrocławiu odbyło się seminarium z logiki".

Zdaniami podobnymi są także zdania:

"Nieprawda, że dzisiaj w Warszawie pada śnieg",

"Nieprawda, że wczoraj w Poznaniu padał śnieg".

Przyjmuję, że zdania podobne są jednocześnie bądź pozytywnymi zdaniami empirycznymi, bądź ich negacjami. Relacja podobieństwa nie może więc zachodzić pomiędzy dwoma zdaniami, z których jedno jest pewnym pozytywnym zdaniem empirycznym, drugie zaś jest negacją pewnego pozytywnego zdania empirycznego. Zakładam, że negacje dwóch zdań podobnych, z których jedno jest pozytywnym zdaniem empirycznym, są zdaniami podobnymi. Relacja podobieństwa posiada ponadto tę własność, że zachodzi pomiędzy dwoma zdaniami, o ile zachodziła pomiędzy negacjami tych zdań. Wydaje się również naturalne założenie, że relacja podobieństwa pomiędzy zdaniami jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią. Założenie takie pozwala dzielić zbiór wszystkich zdań empirycznych na klasy abstrakcji. Z podziałem zbioru zdań empirycznych na klasy związana jest intuicja, że wszystkie zdania mówiące o zdarzeniach, różniących się tylko miejscem i czasem, w których zachodzą, opisują pewne zjawisko.

Omówione wyżej własności relacji podobieństwa wyznaczają następujące aksjomaty:

A1. $x \circ y \Longrightarrow x, y \in Emp^{+} \vee x, y \in NEmp^{+}$,

A2. $x \circ y \wedge x \in Emp^{+} \Longrightarrow nx \circ ny$,

A3. $nx \circ ny \Longrightarrow x \circ y$,

A4. $x, y, z \in Emp \Longrightarrow x \circ x \wedge (x \circ z \wedge y \circ z \Longrightarrow y \circ x)$.

Z aksjomatu A4 wynika, że relacja $\circ$ jest relacją typu równoważności. Klasę abstrakcji wyznaczoną przez zdanie $x$ i relację $\circ$

nazywać będziemy w dalszym ciągu klasą zdań podobnych wyznaczoną przez zdanie $x$ i będziemy ją oznaczać symbolem $[x]_0$. Przypomnijmy, że zbiór $Cn\, X$ interpretowaliśmy jako zbiór wszystkich zdań posiadających dowód na gruncie zdań należących do $X$ i reguł logiki klasycznej. Weźmy pod uwagę dowolną klasę zdań podobnych oraz dowolne zdanie nie dające się udowodnić na podstawie zdań należących do tej klasy i jednocześnie posiadające tę własność, że na jego podstawie można udowonić każde zdanie rozpatrywanej klasy. Zdanie "najsłabsze dedukcyjnie" spośród rozważanych zdań nazywać będziemy generalizacją danej klasy.
Przyjmujemy więc następującą definicję:

$$\text{D1.} \quad x \in Gn\, X \Longleftrightarrow \bigvee_{y} X = [y]_0 \wedge Cn\, X \subsetneq Cn\{x\} \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{z} (X \subset Cn\{z\} \Longrightarrow x \in Cn\{z\}).$$

Wyrażenie $x \in Gn\, X$ czytamy: zdanie $x$ jest generalizacją zdań zbioru $X$ lub krócej: zdanie $x$ generalizuje zbiór $X$.
Generalizację klasy zdań podobnych wyznaczonej na przykład przez zdanie

"Dzisiaj w Warszawie pada deszcz"

można interpretować jako zdanie:

"W dowolnej chwili w dowolnym miejscu pada deszcz".

W dalszym ciągu założymy, że dowolna klasa zdań podobnych jest generalizowana przez pewne zdanie. Postulujemy również, iż na podstawie zdania generalizującego pewną klasę zdań podobnych można udowodnić jedynie te zdania empiryczne, które należą do danej klasy. Własności te ujmują następujące aksjomaty:

$$\text{A5.} \quad x \in Emp \Longrightarrow \bigvee_{y} y \in Gn\, [x]_0 ,$$

A6. $x \in Gn\, X \Longrightarrow Cn\{x\} \cap Emp \subset X.$

Przyjmujemy następującą definicję:

D2. $x \in DX \Longleftrightarrow x \in Cn\, X \vee \bigvee_{Y \subset Cn\, X} x \in Gn\, Y.$

Zbiór DX jest więc zbiorem wszystkich tych zdań, które bądź dają się udowodnić na podstawie zdań zbioru X, bądź też są generalizacjami podzbiorów zbioru Cn X. Zauważę, że funkcja D nie jest konsekwencją.

Ostatni aksjomat rozważanego systemu ma postać:

A7. $X \in Emp^{*} \Longrightarrow DX \in Nsp.$

Jeśli więc X jest bazą empiryczną, to DX jest zbiorem niesprzecznym.

W paragrafie 1 wykażemy, że podany poprzednio aksjomat $A12^{T}$ daje się udowodnić na gruncie przyjętej aksjomatyki. Tym samym wszystkie twierdzenia podane w pracy [18] i dotyczące zdań empirycznych są twierdzeniami systemu $T^{G}$.

Badania przeprowadzone w tej pracy dotyczą przede wszystkim własności generalizacji klas zdań podobnych. W celu scharakteryzowania stosunków logicznych zachodzących pomiędzy generalizacjami wprowadzam pojęcie zbioru wszystkich generalizacji oraz pojęcie generalizacji przeciwnych. Oznaczając zbiór wszystkich generalizacji symbolem Gn przyjmuję następującą definicję:

D3. $x \in Gn \Longleftrightarrow \bigvee_{X} x \in Gn\, X.$

Do zbioru Gn należą więc te i tylko te zdania, które są generalizacjami pewnych klas zdań podobnych.

W pracy wykażemy, że żadna generalizacja jak również negacja żadnej generalizacji nie są ani zdaniami empirycznymi, ani tezami logicznymi, ani negacjami tez logicznych.

Relację przeciwieństwa pomiędzy zdaniami definiujemy następująco:

$$\text{D4.}\quad x * y \Longleftrightarrow \bigvee_{X} (x \in Gn\, X \wedge y \in Gn\, NX \vee x \in Gn\, NX \wedge y \in Gn\, X).$$

Wyrażenie $x * y$ czytamy: generalizacje $x$ i $y$ są przeciwne. Dwie generalizacje są więc przeciwne, gdy jedna z nich generalizuje pewien zbiór $X$, druga zaś generalizuje negację tego zbioru. Generalizacjami przeciwnymi są na przykład zdania:

"W dowolnej chwili w dowolnym miejscu pada deszcz",

"W dowolnej chwili w dowolnym miejscu nie pada deszcz".

Relacja przeciwieństwa, jak udowodnimy później, jest relacją przeciwzwrotną, symetryczną i nieprzechodnią.

Dowolny podzbiór zbioru wszystkich generalizacji nie zawierający generalizacji przeciwnych ani też generalizacji równoważnych nazywać będziemy bazą generalizacji. Rodzinę wszystkich baz generalizacji oznaczymy symbolem $Gn^*$. Definicja pojęcia bazy generalizacji ma więc postać:

$$\text{D5.}\quad X \in Gn^* \Longleftrightarrow X \subset Gn \wedge \sim \bigvee_{x,y \in X} (x * y \vee \{x\} \approx \{x\}).$$

W pracy dowodzę między innymi, że:

Na podstawie zdań należących do dowolnej bazy generalizacji nie można udowodnić ani odrzucić żadnej pary zdań sprzecznych;

Żadna generalizacja należąca do bazy generalizacji nie może być udowodniona ani też odrzucona na podstawie pozostałych elementów tej bazy.

Twierdzenia te są analogiczne do twierdzeń o bazach empirycznych.

Do najważniejszych pojęć, które wprowadzimy w dalszych częściach pracy należy pojęcie wniosku indukcyjnego otrzymanego na pod stawie zdań dowolnego zbioru. Z pojęciem tym związane są pewne funkcje konsekwencji, których własności zbadane są w paragrafie 4.

## § 1. Podstawowe własności zdań podobnych i generalizacji.

Wykażemy na wstępie, że aksjomat $A12^T$ jest twierdzeniem teorii $T^G$. Na podstawie definicji D2 otrzymujemy:

L1. $Cn\ X \subset DX.$

Z aksjomatu A7, L1, $A2^T$, $T1^Tb$ i $D17^T$ wynika

T1. $X \subset Emp \wedge \sim \bigvee_x x, nx \in X \Longrightarrow X \in Nsp.$

Skoro więc aksjomat $A12^T$ jest twierdzeniem teorii $T^G$, zatem twierdzeniami tej teorii są wszystkie twierdzenia podane w pracy [18] i dotyczące zdań empirycznych.
Twierdzenia opisujące własności zdań podobnych poprzedzimy następującym lematem:

L2a. $x \in Emp^+ \Longrightarrow [x]_o \subset Emp^+,$

b. $x \in NEmp^+ \Longrightarrow [x]_o \subset NEmp^+,$

c. $nx \circ ny \Longrightarrow nx, ny \in NEmp^+.$

Lemat ten wynika z A1, $T15^Ta$ i $A11^T$.
Na podstawie L2a,b i $D16^T$ otrzymujemy

T2. $x \in Emp \Longrightarrow [x]_o \subset Emp^+ \vee [x]_o \subset NEmp^+.$

Klasa zdań podobnych wyznaczona przez dowolne zdanie empiryczne jest więc bądź podzbiorem zbioru wszystkich pozytywnych zdań empirycznych bądź też podzbiorem negacji tego zbioru.

Z twierdzeń T2 i $T15^{T}b$ wynika, że

T3. $x \in Emp \Longrightarrow [x]_0 \in Emp^{*}$.

Dowolna klasa zdań podobnych jest więc bazą empiryczną. Tym samym klasy zdań podobnych posiadają własności sformułowane w twierdzeniach $T12^{T}$ – $T14^{T}$.

T4. $x \in Emp^{+} \Longrightarrow N[x]_0 = [nx]_0$.

Negacja klasy zdań podobnych wyznaczonej przez dowolne pozytywne zdanie empiryczne jest identyczna z klasą zdań podobnych wyznaczoną przez negację danego zdania.

D o w ó d. Niech $x \in Emp^{+}$ i załóżmy dla dowodu, że $y \in N[x]_0$. Stąd wobec L2a i $T7^{T}a$ $y \in NEmp^{+}$. Z ostatniego wzoru i $T17^{T}a$ wynika istnienie takiego $z_1 \in Emp^{+}$, że $y = nz_1$, skąd na mocy $T6^{T}a$ $\neg y = z_1$. Ponieważ wobec założenia dodatkowego i $D15^{T}$ $\neg y \in [x]_0$, zatem $z_1 \circ x$. Stąd na mocy A2 $nz_1 \circ nx$ i tym samym $y \in [nx]_0$. Wykazaliśmy więc, że $N[x]_0 \subset [nx]_0$.
Załóżmy teraz dodatkowo, że $y \in [nx]_0$. Stąd wobec A1 i $A11^{T}$ $y \in NEmp^{+}$. Na mocy $T17^{T}a$ istnieje więc takie $z_1 \in Emp^{+}$, że $y = nz_1$, skąd wobec założenia dodatkowego i A3 $z_1 \circ x$ i tym samym wobec $T6^{T}a$ i $D15^{T}$ $y \in N[x]_0$. Wykazaliśmy więc, że $[nx]_0 \subset N[x]_0$, co kończy dowód.

Na podstawie D1, A1, $D16^{T}$, T2 i T3 otrzymujemy

T5a. $x \in Gn\, X \Longrightarrow X \subset Emp^{+} \vee X \subset NEmp^{+}$,

b. $x \in Gn\, X \Longrightarrow X \neq \emptyset \wedge X \in Emp^{*}$.

Zbiór X generalizowany przez pewne zdanie x jest więc niepustą bazą empiryczną.

Zdania będące generalizacjami klas zdań podobnych posiadają następujące własności.

$$\text{T6a.}\quad x \in \mathrm{Gn}\, X \Longrightarrow \mathrm{Cn}\{x\} \cap \mathrm{Emp} = X,$$

$$\text{b.}\quad x \in \mathrm{Gn}\, X \cap \mathrm{Gn}\, Y \Longrightarrow X = Y.$$

W myśl T6a na podstawie zdania generalizującego pewną klasę zdań podobnych można udowodnić te i tylko te zdania empiryczne, które należą do tej klasy.
Twierdzenie T6a wynika łatwo z A6, T5a, D1, $A2^T$ i $D16^T$, twierdzenie T6b jest natychmiastowym wnioskiem z T6a.

$$\text{T7a.}\quad x \in \mathrm{Gn}\, X \Longrightarrow (y \in \mathrm{Gn}\, X \Longleftrightarrow \{x\} \approx \{y\}),$$

$$\text{b.}\quad x \in \mathrm{Gn}\, X \Longrightarrow (y \in \mathrm{Gn}\, X \Longleftrightarrow \{x\} \approx {}^{-1}\{y\}).$$

Jeśli więc zdanie x jest generalizacją pewnego zbioru, to zbiór ten generalizują te i tylko te zdania, które są równoważne zdaniu x (równoważne ze względu na odrzucanie zdaniu x)[4].

D o w ó d T7a. Załóżmy najpierw, że $x, y \in \mathrm{Gn}X$. Na mocy D1 i $A2^T$ otrzymujemy wtedy:

$$X \subset \mathrm{Cn}\{x\} \cap \mathrm{Cn}\{y\}, \qquad \bigwedge_u (X \subset \mathrm{Cn}\{u\} \Longrightarrow x \in \mathrm{Cn}\{u\}),$$

$$\bigwedge_v (X \subset \mathrm{Cn}\{v\} \Longrightarrow y \in \mathrm{Cn}\{v\});$$

Ze wzorów tych wynika, że $x \in \mathrm{Cn}\{y\}$ i $y \in \mathrm{Cn}\{x\}$, skąd wobec $A6^T$ i $T5^T c$ $\{x\} \approx \{y\}$.

---

4) Zdania x i y nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x\} \approx \{y\}$.

Przyjmijmy z kolei, że $x \in Gn\ X$ i $\{x\} \approx \{y\}$. Na mocy D1 mamy wtedy:

$$Cn\ X \subsetneq Cn\{x\}, \tag{1}$$

$$\bigwedge_u (X \subset Cn\{u\} \Longrightarrow x \in Cn\{u\}), \tag{2}$$

$$\bigvee_z X = [z]_0. \tag{3}$$

Uwzględniając założenie, wzór (1) i $D5^T$ otrzymujemy

$$Cn\ X \subsetneq Cn\ \{y\}. \tag{4}$$

Załóżmy dodatkowo, że $X \subset Cn\{u\}$. Wtedy wobec (2) $x \in Cn\ \{u\}$, skąd na mocy $A3^T$, $A4^T$ $Cn\{x\} \subset Cn\{u\}$. Ponieważ jednak $Cn\{x\} = Cn\{y\}$, zatem $Cn\{y\} \subset Cn\ \{u\}$, skąd na podstawie $A2^T$ $y \in Cn\{u\}$. Wykazaliśmy więc, że

$$\bigwedge_u (X \subset Cn\{u\} \Longrightarrow y \in Cn\{u\}). \tag{5}$$

Ze wzorów (3) - (5) i D1 wynika, że $y \in Gn\ X$, co kończy dowód.
Twierdzenie T7b wynika z T7a i $T9^T$a.
W dowodach dalszych twierdzeń korzystać będziemy z następujących lematów:

L3. $x \in Gn\ X \Longrightarrow x \notin Cn X$.

Lemat ten wynika łatwo z D1 i $A3^T$, $A4^T$.

L4a. $x \in Gn\ X \Longrightarrow nx \notin Cn\ DX$,

b. $x \in Gn\ X \Longrightarrow nx \notin Cn\ X$.

D o w ó d L4a. Niech $x \in Gn\, X$ i załóżmy niewprost, że $nx \in Cn\, DX$. Z założenia i T5b wynika, że $X \in Emp^{*}$, skąd na mocy A7 $DX \in Nsp$. Z założenia i $A2^{T}$ wynika również wzór $\bigvee_{Y \subset Cn\, X} x \in Gn\, Y$, skąd wobec D2 i $A2^{T}$ $x \in Cn\, DX$. Tym samym na mocy założenia niewprost i $T1^{T}a$ $DX \notin Nsp$. Otrzymaliśmy więc dwa wyrażenia sprzeczne, co kończy dowód.

Lemat L4b wynika z L4a, $A2^{T}$ i L1.

Wykażemy, że

$$T8. \quad x \in Gn\, X \Longrightarrow Cn^{-1}\{x, nx\} \cap Cn\, X = \emptyset.$$

Żadne więc zdanie wynikające z pewnej klasy zdań podobnych nie może być odrzucone na podstawie generalizacji tej klasy i jej negacji.

D o w ó d. Niech $x \in Gn\, X$ i załóżmy niewprost, że $Cn^{-1}\{x, nx\} \cap Cn\, X \neq \emptyset$. Istnieje więc takie $x_1$, że $x_1 \in Cn\, X$ i $x_1 \in Cn^{-1}\{x, nx\}$. Z ostatniego wzoru, $T8^{T}a$ i $D7^{T}$ wynika, że $x \in Cn\{x_1\} \vee nx \in Cn\{x_1\}$, skąd wobec wzoru $x_1 \in Cn\, X$ i $A3^{T}$, $A4^{T}$ $x \in Cn\, X \vee nx \in Cn\, X$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem $x \notin Cn\, X \wedge nx \notin Cn\, X$, otrzymanym na podstawie założenia i L3, L4b, co kończy dowód.

Na podstawie L3 i L4b otrzymujemy następujący wniosek:

$$W1. \quad x \in Gn\, X \Longrightarrow \{x, nx\} \cap Cn\, X = \emptyset.$$

Widzimy więc, że ani zdanie generalizujące pewną klasę zdań podobnych ani jego negacja nie dają się udowodnić na podstawie zdań tej klasy.

Ilustracją T8 i W1 jest następujący przykład: na podstawie klasy zdań podobnych wyznaczonej przez zdanie

"Dzisiaj w Warszawie pada deszcz"

nie można udowodnić żadnego z następujących zdań:

"W dowolnej chwili w dowolnym miejscu pada deszcz",

"W pewnej chwili w pewnym miejscu nie pada deszcz".

Wykażemy, że żadna generalizacja nie jest ani zdaniem empirycznym, ani tezą logiczną, ani jej negacją.

L5. $x \in Gn \Longrightarrow x \notin Emp$.

D o w ó d. Niech $x \in Gn$ i załóżmy niewprost, że $x \in Emp$. W takim razie wobec D3 i A6 istnieje taki zbiór $X_1$, że:

$$x \in Gn\, X_1, \tag{1}$$

$$Cn\{x\} \cap Emp \subset X_1. \tag{2}$$

Ponieważ $x \in Emp$, zatem wobec $A2^T$ $x \in Cn\{x\} \cap Emp$, skąd na mocy (2) $x \in X_1$, czyli wobec $A2^T$ $x \in Cn\, X_1$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem $x \notin Cn\, X_1$, otrzymanym na podstawie (1) i L3, co kończy dowód.

L6a. $x \in Gn \Longrightarrow x \notin Cn\,\Phi$,

b. $x \in Gn \Longrightarrow nx \notin Cn\,\Phi$,

c. $x \in Gn \Longrightarrow x \notin NCn\,\Phi$,

d. $x \in Gn \Longrightarrow nx \notin NCn\,\Phi$.

Lemat L6a wynika z D3, L3 i $A3^T$, lemat L6b wynika z D3, L4b i $A3^T$, lemat L6c wynika z $D15^T$, $T9^T$c i L6b, lemat L6d jest natychmiastowym wnioskiem z L6a i $T7^T$b.

Zapowiedziane wyżej twierdzenie możemy napisać w postaci:

T9. $Gn \cap (Emp \cup Cn\,\Phi \cup NCn\,\Phi) = \Phi$.

Twierdzenie to wynika z L5, L6a i L6c.
Zauważmy tutaj, że żadne dwa spośród zbiorów Emp, $Cn\Phi$, $NCn\,\Phi$ nie posiadają wspólnych elementów. Wynika to ze wzoru $\Phi \in Emp^*$ oraz z $T12^T$, $T11^Tb$ i $T16^T$.

T10. $x \in Emp \Longrightarrow Cn[x]_o \cap Gn = \Phi$.

Żadnej generalizacji nie można więc udowodnić na podstawie jakiejkolwiek klasy zdań podobnych.

D o w ó d. Niech $x \in Emp$ i załóżmy niewprost, że istnieje takie $x_1$, że

$$x_1 \in Cn[x]_o, \tag{1}$$

$$x_1 \in Gn. \tag{2}$$

W takim razie na mocy D3 istnieje taki zbiór $X_1$, że

$$x_1 \in Gn\,X_1. \tag{3}$$

Stąd i T5b, $T14^Ta$ otrzymujemy

$$Cn\,X_1 \cap Emp = X_1. \tag{4}$$

Korzystając z założenia, T3 i $T14^Ta$ otrzymujemy ponadto

$$Cn[x]_o \cap Emp = [x]_o. \tag{5}$$

Ponieważ ze wzoru (3) i definicji D1 wynika, że $Cn\ X_1 \subset Cn\{x_1\}$, zatem wobec (1), $A3^T$ i $A4^T$ $Cn\ X_1 \subset Cn[x]_0$, skąd $Cn\ X_1 \cap Emp \subset Cn[x]_0 \cap Emp$ i tym samym wobec (4) i (5) $X_1 \subset [x]_0$. Zbiór $X_1$ jest jednak pewnym abstraktem relacji $o$, zatem $X_1 = [x]_0$. Z ostatniego wzoru i (3) wynika, że $x_1 \in Cn[x]_0$, skąd na mocy L3 $x_1 \notin Cn[x]_0$. Wzór ten jest sprzeczny ze wzorem (1), co kończy dowód niewprost.

T11a. $x \in Gn\ X \Longrightarrow \bigwedge_{y \in X} x \in Cn^{-1}\{y\}$,

b. $x \in Gn\ X \Longrightarrow x \notin Cn^{-1}(Emp \setminus X)$.

Dowolna generalizacja pewnej klasy zdań podobnych $X$ jest odrzucona na podstawie każdego zdania tej klasy, natomiast nie jest odrzucona na podstawie zdań empirycznych nie należących do tej klasy. Zauważmy, że jeśli w zbiorze $X$ istnieje co najmniej jedno zdanie fałszywe, wówczas generalizacja tego zbioru jest również zdaniem fałszywym.

Twierdzenie T11a wynika z D1, $A2^T$ i $D7^T$, twierdzenie T11b wynika z D1 i A6.

T12. $x \in Gn\ X \Longrightarrow NCn\ X \subsetneq Cn^{-1}\{nx\}$.

Negacja dowolnego zdania wynikającego z pewnej klasy zdań podobnych jest więc odrzucona na podstawie negacji zdania generalizującego tę klasę.

D o w ó d. Załóżmy, że $x \in Gn\ X$ i $y \in NCn\ X$. Wtedy na mocy $D15^T$ i D1 $\neg y \in Cn\{x\}$. Uwzględniając $T9^T c$, $T5^T b$ i $T5^T a$ otrzymujemy $nx \in Cn\{y\}$, skąd wobec $D7^T$ $y \in Cn^{-1}\{nx\}$. Wykazaliśmy więc, że $NCn\ X \subseteq Cn^{-1}\{nx\}$. Z założenia i L3 wynika, że $x \notin Cn\ X$, skąd wobec $T7^T b$ $nx \notin NCn\ X$. Ponieważ jednak $nx \in Cn^{-1}\{nx\}$, zatem $NCn\ X \subsetneq Cn^{-1}\{nx\}$, co kończy dowód.

T13. $x \in Gn \Longrightarrow \{x\} \in Nsp.$

Na podstawie żadnej generalizacji nie można udowodnić jakiejkolwiek pary zdań sprzecznych.

Twierdzenie T13 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia T24, podanego w paragrafie 3. Podajemy jednak prosty jego dowód, gdyż na twierdzenie to będziemy się powoływać dowodząc kilku późniejszych twierdzeń.

D o w ó d. Załóżmy, że $x \in Gn$. W takim razie wobec D3 i T5b istnieje taki zbiór $X_1$, że $X_1 \in Emp^*$, skąd na mocy A7 $DX_1 \in Nsp$. Ponieważ $x \in Gn\, X_1$, zatem wobec $A2^T$ i D2 $x \in DX_1$ i tym samym na mocy $T1^Tb$ $\{x\} \in Nsp$, co kończy dowód.

T14. $x \in Gn \Longrightarrow x \notin Cn^{-1}NCn\{x\}.$

Żadna generalizacja nie może być odrzucona na podstawie negacji jakiegokolwiek zdania wynikającego z tej generalizacji.

D o w ó d. Niech $x \in Gn$ i załóżmy niewprost, że $x \in Cn^{-1}NCn\{x\}$. Z założenia i T13 wynika, że $\{x\} \in Nsp$. Na podstawie założenia niewprost i $T11^Tc$ otrzymujemy $x \in NCn\{x\}$, skąd wobec $D15^T$ i $T9^Tc$ $nx \in Cn\{x\}$. Ponieważ na mocy $A2^T$ $x \in Cn\{x\}$, zatem $\bigvee_y y, ny \in Cn\{x\}$, skąd wobec $T1^Ta$ $\{x\} \notin Nsp$. Otrzymaliśmy w ten sposób dwa wyrażenia sprzeczne, co kończy dowód.

T15. $X \in Emp^* \Longrightarrow DX \cap Emp = X.$

Jeśli więc $X$ jest dowolną bazą empiryczną, wówczas do zbioru $DX$ należą te i tylko te zdania empiryczne, które należą do danej bazy.

D o w ó d. Załóżmy, że $X \in Emp^*$. Wtedy wobec $D17^T$ $X \subset Emp$, zaś wobec $A2^T$ i L1 $X \subset DX$ i tym samym $X \subset DX \cap Emp$. W celu wykazania inkluzji odwrotnej załóżmy dodatkowo, że $x \in DX \cap Emp$. Przypuśćmy na chwilę, że istnieje taki zbiór $Y_1$, że $Y_1 \subset Cn\, X$ i $x \in Gn\, Y_1$. Wtedy na mocy D3 i założenia dodatkowego $x \in Gn \cap Emp$. Wzór ten jednak jest sprzeczny ze wzorem $Gn \cap Emp = \Phi$, wynikającym z T9. Wykazaliśmy więc, że $\sim \bigvee_{Y \subset Cn\, X} x \in Gn\, Y$, skąd wobec wzoru $x \in DX$ i D2 $x \in Cn\, X$ i tym samym $x \in Cn\, X \cap Emp$. Korzystając z założenia i $T14^T a$ otrzymujemy więc $x \in X$. W ten sposób wykazaliśmy, że $DX \cap Emp \subset X$, co kończy dowód.

W dalszych częściach pracy skorzystamy z następujących lematów:

L7. $x \in Gn\, NX \Longrightarrow NX \subset NEmp^+$.

Lemat ten dowodzi się w oparciu o T5a,b, $D15^T$ i $T17^T c$.

L8. $Gn\, X \cap Gn\, NX = \Phi$.

Lemat ten wynika łatwo z T6b, T5b, L7, $T15^T a$ i $T7^T a$.

L9a. $x \in Gn\, X \wedge X \subset Emp^+ \Longrightarrow \bigvee_y y \in Gn\, NX$,

b. $x \in Gn\, NX \Longrightarrow \bigvee_y y \in Gn\, X$.

Lemat L9a otrzymujemy na podstawie D1, D4, $T7^T b$, $D16^T$ i A5, lemat L9b wynika z L7, D1, $T17^T a$, A5, $T7^T a$ i T4.

## § 2. Generalizacje przeciwne.

W myśl definicji D4 pomiędzy dwoma zdaniami zachodzi relacja przeciwieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jedno z tych zdań generalizuje pewien zbiór X, drugie zaś generalizuje negację tego zbioru.

Twierdzenie charakteryzujące własności generalizacji przeciwnych poprzedzimy następującym lematem:

L10a. $x * y \wedge \{y\} \approx \{z\} \Longrightarrow x * z$,

b. $x * y \wedge x * z \Longrightarrow \{y\} \approx \{z\}$.

Lemat L10a wynika z D4 i T7a, lemat L10b łatwo dowodzi się w oparciu o D4, T6b, $T7^{T}a$, L7, T5b, $T17^{T}c$ i T7a.

Z powyższego lematu i twierdzenia $T9^{T}a$ wynika

T16a. $x * y \Longrightarrow (x * z \Longleftrightarrow \{y\} \approx \{z\})$,

b. $x * y \Longrightarrow (x * z \Longleftrightarrow \{y\} \approx^{-1} \{z\})$.

Jeśli więc y jest generalizacją przeciwną do x, to przeciwne do generalizacji x są te i tylko te zdania, które są równoważne (równoważne ze względu na odrzucanie) generalizacji y.

Na podstawie D4, L8 i T16a otrzymujemy

T17a. $\sim(x * x)$,

b. $x * y \Longrightarrow y * x$,

c. $x * y \wedge y * z \Longrightarrow \sim(x * z)$.

Relacja przeciwieństwa jest więc relacją przeciwzwrotną, symetryczną i nieprzechodnią.

T18. $x \in Gn \Longrightarrow \bigvee_{y} x * y.$

Dla dowolnej generalizacji istnieje więc generalizacja przeciwna. Twierdzenie T18 wynika łatwo z D3, T5a, L9a, D4, $T17^{T}b$ i L19b.

T19a. $x * y \Longrightarrow nx \in Cn\{y\},$

b. $x * y \Longrightarrow \{x,y\} \notin Nsp.$

W myśl T19a negacja generalizacji $x$ wynika z dowolnej generalizacji przeciwnej z $x$, w myśl zaś T19b na podstawie dwóch generalizacji przeciwnych daje się udowodnić dowolne zdanie.

D o w ó d. Załóżmy, że $x * y$. Wtedy wobec D4 istnieje taki zbiór $X_1$, że $x \in Gn\, X_1 \wedge y \in Gn\, NX_1 \vee x \in Gn\, NX_1 \wedge y \in Gn\, X_1$. Dowód ograniczymy do przypadku, gdy $x \in Gn\, X_1$ i $y \in Gn\, NX_1$. W przypadku drugim twierdzenie dowodzi się analogicznie. Uwzględniając D1 otrzymujemy:

$$Cn\, X_1 \subset Cn\{x\} \quad \text{i} \quad Cn\, NX_1 \subset Cn\{y\}. \tag{1}$$

Wobec T5b i wzoru $x \in Gn\, X_1$ istnieje takie $z_1$, że $z_1 \in X_1$, skąd na mocy $T7^{T}a$ $nz_1 \in NX_1$. Tym samym wobec $A2^{T}$ i wzoru (1)

$$z_1 \in Cn\{x\}, \tag{2}$$

$$nz_1 \in Cn\{y\}. \tag{3}$$

Na podstawie (2) i $T5^{T}a$, b otrzymujemy

$$nx \in Cn\{nz_1\}. \tag{4}$$

Ze wzorów (3), (4) i $A3^{T}$, $A4^{T}$ wynika, że $nx \in Cn\{y\}$, co kończy dowód twierdzenia T19a.

Na podstawie wzorów (2), (3) i $A3^T$ otrzymujemy $z_1, nz_1 \in Cn\{x,y\}$, skąd wobec $T1^T a$ $\{x,y\} \notin Nsp$, co kończy dowód twierdzenia T19b. Z twierdzenia T19a i definicji $D7^T$ wynika następujący wniosek:

W2. $x * y \Longrightarrow y \in Cn^{-1}\{nx\}$.

Dowolna z dwu generalizacji przeciwnych jest więc odrzucona na podstawie negacji drugiej.

T20. $X \in Nsp \Longrightarrow \sim \bigvee_{x,y \in X} x * y$.

Żaden więc zbiór niesprzeczny nie zawiera generalizacji przeciwnych. Powyższe twierdzenie wynika z T19b i $T1^T b$.

T21. $x * y \Longrightarrow Cn\{\neg x\} \cap Cn\{\neg y\} = Cn\Phi$.

Iloczyn konsekwencji zdań sprzecznych z generalizacjami przeciwnymi równy jest zbiorowi tez logicznych. Tak więc zdaniami wynikającymi jednocześnie z każdej z negacji dwóch generalizacji przeciwnych są te i tylko te zdania, które są tezami logicznymi.

D o w ó d. Załóżmy, że $x * y$. Wtedy wobec T19a $ny \in Cn\{x\}$, skąd na mocy $A3^T$, $A4^T$ $Cn\{ny\} \subset Cn\{x\}$ i tym samym $Cn\{ny\} \cap Cn\{nx\} \subset Cn\{x\} \cap Cn\{nx\}$. Uwzględniając $A8^T$ i $T9^T b$ otrzymujemy $Cn\{\neg x\} \cap Cn\{\neg y\} \subset Cn\Phi$. Inkluzja odwrotna jest oczywista, co kończy dowód.

T22. $x * y \Longrightarrow Cn^{-1}\{x\} \cap Cn^{-1}\{y\} = NCn\Phi$.

Z powyższego twierdzenia wynika więc, że zdaniami dającymi się odrzucić jednocześnie na podstawie każdej z dwóch generalizacji przeciwnych są te i tylko te zdania, które są sprzeczne z tezami logicznymi.

D o w ó d. Załóżmy, że $x * y$ i $z \in Cn^{-1}\{x\} \cap Cn^{-1}\{y\}$. Wtedy wobec $D7^T$ $x, y \in Cn\{z\}$, skąd na mocy $T5^T a, b$ i $T9^T b$ $nz \in Cn\{\neg x\} \cap Cn\{\neg y\}$. Z ostatniego wzoru, z założenia i T21 wynika, że $nz \in Cn\emptyset$, skąd wobec $T9^T c$ i $D15^T$ $z \in NCn\emptyset$. Udowodniliśmy więc inkluzję $Cn^{-1}\{x\} \cap Cn^{-1}\{y\} \subset NCn\emptyset$. Inkluzja odwrotna wynika z $T8^T b$, co kończy dowód.

Ostatnie twierdzenie podane w tym paragrafie poprzedzimy następującymi lematami.

L11. $x \in Gn \Longrightarrow nx \notin Emp$.

D o w ó d. Niech $x \in Gn$ i załóżmy niewprost, że $nx \in Emp$. Na mocy założenia i T18 istnieje takie $y_1$, że

$$x * y_1, \tag{1}$$

Stąd i twierdzenia T19a wynika, że

$$nx \in Cn\{y_1\}. \tag{2}$$

Na mocy definicji D4 i wzoru (1) istnieje taki zbiór $X_1$, że

$$x \in Gn\, X_1 \wedge y_1 \in Gn\, NX_1 \vee x \in Gn\, NX_1 \wedge y_1 \in Gn\, X_1. \tag{3}$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy

$$x \in Gn\, X_1 \wedge y_1 \in Gn\, NX_1. \tag{1.1}$$

Z twierdzenia T6a wynika wtedy, że $Cn\{y_1\} \cap Emp = NX_1$, ponieważ jednak $nx \in Cn\{y_1\} \cap Emp$, zatem $nx \in NX_1$. Stąd na mocy $T7^T b$ i $A2^T$ otrzymujemy $x \in Cn\, X_1$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem $x \notin Cn\, X_1$ otrzymanym na podstawie (1.1) i L3.

Rozważmy z kolei przypadek, gdy

$$x \in Gn\, NX_1 \wedge y_1 \in Gn\, X_1. \qquad (2.1)$$

Stąd wobec T6a, założenia niewprost i wzoru (2) $nx \in X_1$. Ze wzoru (2.1) i L7 wynika jednak, że $NX_1 \subset NEmp^+$, skąd wobec $T7^T$a $X_1 \subset Emp^+$ i tym samym $nx \in Emp^+$. Ostatni wzór jest sprzeczny z aksjomatem $A11^T$. Ponieważ w każdym z rozważanych przypadków otrzymujemy sprzeczność, zatem wobec wzoru (3) dowód niewprost jest zakończony.

L12. $x \in Gn\, X \Longrightarrow nx \notin Gn\, NX.$

D o w ó d. Niech $x \in Gn\, X$ i załóżmy niewprost, że $nx \in Gn\, NX$. Na mocy założenia i T5b istnieje takie $y_1$, że $y_1 \in X$, skąd wobec $T7^T$b $ny_1 \in NX$. Z założenia niewprost i D1 wynika jednak, że $Cn\, NX \subset Cn\{nx\}$, zatem $ny_1 \in Cn\{nx\}$, skąd $x \in Cn\{y_1\}$. Z ostatniego wzoru, $A3^T$ i wzoru $y_1 \in X$ wynika, że $x \in Cn\, X$. Wzór ten jest sprzeczny ze wzorem $x \notin Cn\, X$, otrzymanym na podstawie założenia i L3, co kończy dowód niewprost.

L13. $x \in Gn \Longrightarrow nx \notin Gn.$

D o w ó d. Przyjmijmy, że $x \in Gn$ i załóżmy niewprost, że $nx \in Gn$. Z założenia niewprost i D3 wynika istnienie takiego zbioru $X_1$, że $nx \in Gn\, X_1$, skąd wobec T6a:

$$Cn\{nx\} \cap Emp = X_1. \qquad (1)$$

Na mocy założenia i T18 istnieje takie $y_1$, że

$$x * y_1. \qquad (2)$$

Z powyższego wzoru i twierdzenia T19a wynika, że $nx \in Cn\{y_1\}$, skąd $Cn\{nx\} \subset Cn\{y_1\}$ i tym samym

$$Cn\{nx\} \cap Emp \subset Cn\{y_1\} \cap Emp. \tag{3}$$

Ze wzoru (2) i definicji D4 wynika istnienie takiego zbioru $Y_1$, że

$$x \in Gn\, Y_1 \wedge y_1 \in Gn\, NY_1 \vee x \in Gn\, NY_1 \wedge y_1 \in Gn\, Y_1. \tag{4}$$

Ograniczymy się do rozważenia przypadku, gdy

$$x \in Gn\, Y_1 \wedge y_1 \in Gn\, NY_1. \tag{1.1}$$

W przypadku drugim dowód jest analogiczny.
Ze wzoru (1.1) i T6a wynika, że $Cn\{y_1\} \cap Emp = NY_1$, zatem wobec (1) i (3) $X_1 \subset NY_1$. Ponieważ zbiory $X_1$ i $NY_1$ są pewnymi klasami zdań podobnych, zatem $X_1 = NY_1$. Stąd i ze wzoru $nx \in Gn\, X_1$ otrzymujemy $nx \in Gn\, NY_1$. Wzór ten jest sprzeczny ze wzorem $nx \notin Gn\, NY_1$ otrzymanym na podstawie (1.1) i L12, co kończy dowód niewprost.

Bezpośrednim wnioskiem z lematów L13, L11, L6b, d jest twierdzenie:

T23. $x \in Gn \Longrightarrow nx \notin Gn \cup Emp \cup Cn\,\emptyset \cup NCn\,\emptyset$.

Widzimy więc, że negacja żadnej generalizacji nie jest ani generalizacją, ani zdaniem empirycznym, ani tezą logiczną, ani jej negacją.

§ 3. Bazy generalizacji.

Bazą generalizacji nazwaliśmy dowolny podzbiór zbioru wszystkich generalizacji nie zawierający generalizacji przeciwnych ani też generalizacji równoważnych.

Przed podaniem twierdzeń opisujących własności baz generalizacji wprowadzimy nowe definicje oraz udowodnimy kilka lematów.

D6. $x \in PX \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} x * y.$

Zbiór PX nazywamy zbiorem wszystkich generalizacji przeciwnych do generalizacji należących do zbioru X. Zauważmy, że jeśli $X \cap Gn = \emptyset$, wówczas zbiór PX jest zbiorem pustym.

D7. $x \in RX \Longleftrightarrow \bigvee_{y \in X} \{x\} \approx \{y\}.$

Zbiór RX nazywamy zbiorem wszystkich zdań równoważnych ze zdaniami zbioru X.

D8. $Y \in Abs\ X \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in X} x \in Gn\ Y.$

Wyrażenie $Y \in Abs\ X$ czytamy; zbiór Y należy do rodziny klas zdań podobnych generalizowanych przez zdania zbioru X. Zauważmy, że jeśli $X \cap Gn = \emptyset$, wówczas rodzina Abs X jest zbiorem pustym.

L14. $\sim \bigvee_{x,y \in X} x * y \Longrightarrow \bigcup_{Y \in Abs\ X} Y \in Emp^*.$

D o w ó d. Niech $\sim \bigvee_{x,y \in X} x * y$ i załóżmy niewprost, że $\bigcup_{Y \in Abs\ X} Y \notin Emp^*$. Ponieważ na mocy D8, T5a i D16$^T$ $\bigcup_{Y \in Abs\ X} Y \subset Emp$, zatem zgodnie z założeniem niewprost i $D17^T$ istnieje takie $z_1$, że

$$z_1, nz_1 \in \bigcup_{Y \in \mathrm{Abs}\, X} Y. \tag{1}$$

Istnieją więc takie zbiory $Y_1$, $Y_2$, że

$$Y_1, Y_2 \in \mathrm{Abs}\, X, \tag{2}$$

$$z_1 \in Y_1 \text{ i } nz_1 \in Y_2. \tag{3}$$

Na mocy D8 i wzoru (2) istnieje takie $x_1$ i takie $y_1$, że

$$x_1, y_1 \in X, \tag{4}$$

$$x_1 \in \mathrm{Gn}\, Y_1 \quad \text{i} \quad y_1 \in \mathrm{Gn}\, Y_2. \tag{5}$$

Ze wzoru (5) i D1 wynika, że zbiory $Y_1$ i $Y_2$ są klasami zdań podobnych, zatem wobec wzoru (3)

$$Y_1 = [z_1]_O \quad \text{i} \quad Y_2 = [nz_1]_O. \tag{6}$$

Ponieważ $nz_1 \in NEmp^+$, zatem $z_1 \in Emp^+$, skąd na mocy T4 $N[z_1]_O = [nz_1]_O$.
Stąd zaś i ze wzoru (6) wynika, że

$$Y_2 = NY_1. \tag{7}$$

Na podstawie wzorów (5) i (7) otrzymujemy $x_1 \in \mathrm{Gn}\, Y_1$ i $y_1 \in \mathrm{Gn}\, NY_1$, skąd wobec D4 i wzoru (4) $\bigvee_{x,y \in X} x * y$. Ostatni wzór jest sprzeczny z założeniem, co kończy dowód niewprost.

L15. $\sim \bigvee_{x,y \in X} x * y \Longrightarrow D \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y \in Nsp.$

Lemat ten wynika z L14 i A7.

L16. $X \subset Gn \Longrightarrow RX \cup Cn \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y \subset D \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y.$

D o w ó d. Niech $X \subset Gn$ i załóżmy, że $x \in RX \cup Cn \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y$.

Stąd $x \in RX \vee x \in Cn \bigcup_{Y \in Abs.X} Y$. W przypadku, gdy $x \in Cn \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y$ lemat wynika z L1.

Rozważmy, więc przypadek, gdy

$$x \in RX. \tag{1}$$

Na podstawie D7 istnieje wtedy takie $y_1$, że

$$y_1 \in X, \tag{2}$$

$$\{x\} \approx \{y_1\}. \tag{3}$$

Ponieważ na mocy założenia i wzoru (2) $y_1 \in Gn$, zatem wobec D3 istnieje taki zbiór $Z_1$, że

$$y_1 \in Gn\, Z_1. \tag{4}$$

Ze wzorów (2), (4) i definicji D8 wynika, że $Z_1 \in Abs\, X$ i tym samym $Z_1 \subset \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y$, skąd na mocy $A2^T$

$$Z_1 \subset Cn \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y. \tag{5}$$

Na podstawie wzorów (3), (4) i twierdzenia T7a otrzymujemy ponadto, $x \in Gn\ Z_1$ i tym samym wobec (5)

$$\bigvee_{Z} (Z \subset Cn \bigcup_{Y \in Abs\ X} Y \wedge x \in Gn\ Z). \tag{6}$$

Stąd na mocy D2 otrzymujemy wzór $x \in D \bigcup_{Y \in Abs\ X} Y$, co kończy dowód.

L17. $\bigcup_{Y \in Abs\ X} Y \subset Cn\ X.$

Lemat ten wynika z D8, D1, $A2^T$ i $A3^T$.

L18a. $X \subset RX,$

b. $X \approx RX.$

Lemat ten otrzymujemy na podstawie D7, $D5^T$ i $A2^T$-$A4^T$.

L19. $X \approx RX \cup \bigcup_{Y \in Abs\ X} Y.$

Powyższy lemat wynika z $D5^T$, L17, L18a, b i $A2^T$-$A4^T$.

Możemy teraz sformułować jedno z ważniejszych twierdzeń niniejszej pracy:

T24. $X \subset Gn \wedge \sim \bigvee_{x,y \in X} x * y \Longrightarrow X \in Nsp.$

Każdy więc podzbiór zbioru generalizacji nie zawierający generalizacji przeciwnych ma tę własność, że nie wynikają z niego żadne dwa zdania sprzeczne.

D o w ó d[5]. Załóżmy, że

$$X \subset Gn, \tag{1}$$

$$\sim \bigvee_{x, y \in X} x \neq y. \tag{2}$$

Z założenia (1), lematu L16 i $A3^T$ wynika wzór

$$Cn(RX \cup Cn \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y) \subset Cn\,(D \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y). \tag{3}$$

Stąd i z $T4^T$ otrzymujemy

$$Cn(RX \cup \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y) \subset Cn\,(D \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y). \tag{4}$$

Ponieważ z założenia (2), L15 i $D1^T$ wynika, że $Cn(D \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y) \neq S$, zatem wobec (4)

$$Cn(RX \cup \bigcup_{Y \in Abs\, X} Y) \neq S. \tag{5}$$

Stąd, z L19 i $D5^T$, wynika, że $Cn\, X \neq S$. Na podstawie ostatniego wzoru i definicji $D1^T$ wnioskujemy, że $X \in Nsp$, co kończy dowód. Z powyższego twierdzenia i definicji D5 wynika w szczególności, że

T25. $Gn^* \subseteq Nsp$.

Dowolna baza generalizacji jest więc zbiorem niesprzecznym.

5) W pierwszej redakcji pracy dowód twierdzenia T24 był dość skomplikowany. Podany tutaj dowód pochodzi od Doc. dr W.A. Pogorzelskiego.

W dalszym ciągu korzystać będziemy z następujących własności zbioru PX.

L20. $PX \subset Gn$.

Lemat ten jest wnioskiem z definicji D3, D4 i D6.

T26a. $X \in Nsp \Longrightarrow PX \in Nsp$,

b. $X \subset Gn \wedge PX \in Nsp \Longrightarrow X \in Nsp$.

Z powyższego twierdzenia wynika, że dowolny podzbiór X zbioru wszystkich generalizacji jest zbiorem niesprzecznym wtedy i tylko wtedy, gdy niesprzeczny jest zbiór wszystkich generalizacji przeciwnych do generalizacji należących do X.

D o w ó d T26a. Niech $X \in Nsp$ i załóżmy niewprost, że $PX \notin Nsp$. W takim razie wobec T24 i L20 istnieją takie $z_1$ i $z_2$, że

$$z_1, z_2 \in PX, \tag{1}$$

$$z_1 * z_2. \tag{2}$$

Na podstawie definicji D6 i wzoru (1) istnieją takie $x_1$ i $y_1$, że

$$x_1, y_1 \in X, \tag{3}$$

$$z_1 * x_1, \tag{4}$$

$$z_2 * y_1. \tag{5}$$

Ze wzorów (2), (4) i twierdzenia T16a wynika, że $\{x_1\} \approx \{z_2\}$, skąd wobec (5) i T16a $x_1 * y_1$. Na podstawie ostatniego wzoru i (3) otrzymujemy $\bigvee_{x,y \in X} x * y$, skąd na mocy T20 $X \notin Nsp$. Ostatni wzór jest sprzeczny z założeniem, co kończy dowód niewprost. Twierdzenie T26b wynika z T24, D6 i T20. Dowód twierdzenia jest analogiczny do dowodu T26a.

L21. $PPX \subset Cn\,X$.

Lemat ten wynika z D6, T16a, $T5^Tc$, $A6^T$ i $A3^T$.

T27a. $X \subset Gn \Longrightarrow NX \subset Cn\,PX$,

b. $NPX \subset Cn\,X$.

W myśl T27a na podstawie zbioru generalizacji przeciwnych do generalizacji należących do zbioru X można udowodnić negację każdego zdania zbioru X; w myśl T27b negacja dowolnej generalizacji przeciwnej do generalizacji należącej do zbioru X daje się udowodnić na podstawie zbioru X.

D o w ó d T27a. Niech $X \subset Gn$ i załóżmy dla dowodu, że $x \in NX$. Wtedy na mocy założenia i definicji $D15^T$ $\neg x \in Gn$, skąd wobec T18 istnieje takie $y_1$, że

$$\neg x * y_1. \tag{1}$$

Z powyższego wzoru i twierdzeń T19a, $T9^Tb$, $T5^Ta,b$ wynika, że

$$x \in Cn\{y_1\}. \tag{2}$$

Ze wzoru (1), definicji D6 i założenia wynika jednak, że $y_1 \in PX$, skąd wobec $A3^T$ i (2) $x \in Cn\,PX$, co kończy dowód.

Twierdzenie T27b wynika z I20, T27a, I21 i $A3^T$, $A4^T$.

T28. Jeżeli $X \subset Gn \wedge \sim \bigvee_{x,y \in X} x * y$, to

a. $Cn\, X \cap NCn\, X = \Phi$,

b. $(Cn\, X)' \in Zpł^{-1} \wedge NCn\, X \in Nsp^{-1}$,

c. $Cn\, PX \cap NCn\, PX = \Phi$,

d. $NCn\, X \cap Cn\, NPX = \Phi$.

Twierdzenia T28a,b są bezpośrednimi wnioskami z T24 i $T11^T$a, b; twierdzenia T28c,d wynikają z T24, T26a, T27b i $T11^T$b. Zauważmy, że własności a-d podane w twierdzeniu T28 posiada dowolna baza generalizacji.

T29. $X \in Gn^* \wedge Y \subset X \Longrightarrow X \setminus Y \cup PY \in Nsp$.

Po odjęciu od bazy generalizacji dowolnego jej podzbioru i dodaniu zbioru wszystkich generalizacji przeciwnych do generalizacji należących do tego podzbioru otrzymuje się zbiór niesprzeczny.

D o w ó d. Niech $X \in Gn^*$ i $Y \subset X$. Załóżmy niewprost, że

$$X \setminus Y \cup PY \notin Nsp. \tag{1}$$

Na mocy założenia, T25 i $T1^T$b otrzymujemy

$$Y,\ X \setminus Y \in Nsp. \tag{2}$$

Z założenia i definicji D5 wynikają ponadto wzory:

$$X \setminus Y \subset Gn, \tag{3}$$

$$\sim \bigvee_{x,y \in X} \{x\} \approx \{y\}. \tag{4}$$

Uwzględniając L20 i wzór (3) mamy $X \setminus Y \cup PY \subset Gn$ i tym samym wobec (1) i T24 istnieją takie $x_1$ i $y_1$, że

$$x_1 * y_1, \tag{5}$$

$$x_1, y_1 \in X \setminus Y \cup PY. \tag{6}$$

Wobec wzoru (6) należy rozważyć cztery przypadki:

(a) $x_1, y_1 \in X \setminus Y$,

(b) $x_1, y_1 \in PY$,

(c) $x_1 \in X \setminus Y \wedge y_1 \in PY$,

(d) $x_1 \in PY \wedge y_1 \in X \setminus Y$.

Dowód twierdzenia będzie zakończony, jeśli w każdym z wymienionych przypadków otrzymamy dwa wyrażenia sprzeczne.
Zakładając wzór (a) i uwzględniając (5) otrzymujemy $\bigvee_{x,y \in X \setminus Y} x * y$. Stąd na mocy T20 $X \setminus Y \notin Nsp$, co jest sprzeczne ze wzorem (2). Podobnie, na mocy T20 i T26a otrzymujemy sprzeczność w przypadku (b). Załóżmy z kolei wzór (c). Wtedy na podstawie D6 istnieje takie $z_1 \in Y$, że $y_1 * z_1$, skąd wobec (5) i T16a $\{x_1\} \approx \{z_1\}$ i tym samym $\bigvee_{x,z \in X} \{x\} \approx \{z\}$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem (4). W podobny sposób uzyskujemy sprzeczność również w przypadku (d), co kończy dowód niewprost.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia T29 jest

T30a. $X \in Gn^* \Longrightarrow \bigwedge_{x \in X} (X \setminus \{x\} \cup P\{x\} \in Nsp)$.

b. $X \in Gn^* \Longrightarrow \bigwedge_{x,y \in X} (X \setminus \{x,y\} \cup P\{x,y\} \in Nsp)$.

Z powyższego twierdzenia korzystać będziemy w dowodzie dwóch następnych twierdzeń. Przedtem jednak podajemy następujące lematy:

L22. $x,y \in Gn \Longrightarrow \{nx,ny\} \subset Cn\ P\{x,y\}$.

Lemat ten otrzymujemy na podstawie T27a, $A2^T$ i $T7^T$b,c.

L23a. $y \in P\{x\} \Longleftrightarrow y * x$,

b. $y \in P\{x\} \Longleftrightarrow R\{y\} = P\{x\}$,

c. $y \in P\{x\} \Longleftrightarrow \{y\} \approx P\{x\}$.

Łatwy dowód tego lematu pomijamy.

L24. $x \in Gn \Longrightarrow \{x\} \cup P\{x\} \notin Nsp$.

D o w ó d. Niech $x \in Gn$. W takim razie wobec T18 istnieje takie $y_1$, że $x * y_1$, skąd na mocy L23a, c $\{y_1\} \approx P\{x\}$. Z ostatniego wzoru, $T4^T$ i $D5^T$ wynika, że $\{y_1,x\} \approx \{x\} \cup P\{x\}$. Uwzględniając wzór $x * y_1$ i T19b otrzymujemy jednak, że $\{y_1,x\} \notin Nsp$ i tym samym wobec $T1^T$c $\{x\} \cup P\{x\} \notin Nsp$, co kończy dowód.

Wykażemy teraz, że każdy podzbiór zbioru generalizacji nie zawierający generalizacji przeciwnych ani też generalizacji równoważnych ma tę własność, że na podstawie tego podzbioru nie można odrzucić żadnej pary zdań sprzecznych:

T31. $Gn^* \subset Nsp^{-1}$.

D o w ó d. Niech $X \in Gn^*$ i załóżmy niewprost, że $X \notin Nsp^{-1}$. Wtedy wobec $D12^T$ istnieje takie $x_1$, że $x_1, nx_1 \in Cn^{-1}X$, skąd na mocy $D7^T$ istnieją takie $y_1$ i $y_2$, że

$$y_1, y_2 \in X, \tag{1}$$

$$y_1 \in Cn\{x_1\} \quad i \quad y_2 \in Cn\{nx_1\}. \tag{2}$$

Uwzględniając założenie, D5 i wzór (1) otrzymujemy $y_1, y_2 \in Gn$, skąd na mocy I22

$$\{ny_1, ny_2\} \subset Cn\, P\{y_1, y_2\}. \tag{3}$$

Ze wzoru (2) i $T5^T$a, b wynika, że $x_1 \in Cn\{ny_2\}$ i $nx_1 \in Cn\{ny_1\}$, skąd wobec (3) i $A3^T$, $A4^T$:

$$x_1, nx_1 \in Cn\, P\{y_1, y_2\}. \tag{4}$$

Na podstawie ostatniego wzoru i $A3^T$ otrzymujemy

$$x_1, nx_1 \in Cn(X \setminus \{y_1, y_2\} \cup P\{y_1, y_2\}). \tag{5}$$

skąd wobec $T1^T$a $X \setminus \{y_1, y_2\} \cup P\{y_1, y_2\} \notin Nsp$. Wzór ten jednak jest sprzeczny ze wzorem $X \setminus \{y_1, y_2\} \cup P\{y_1, y_2\} \in Nsp$, otrzymanym na podstawie założenia, (1) i T30b, co kończy dowód.

T32a. $Gn^* \subset Nzl$,

b. $Gn^* \subset Nzl^{-1}$.

Dowolny podzbiór zbioru generalizacji nie zawierający generalizacji przeciwnych ani też generalizacji równoważnych ma więc tę własność, że żadna generalizacja należąca do tego podzbioru nie daje się udowodnić ani odrzucić na podstawie pozostałych jego elementów.

D o w ó d T32a. Niech $X \in Gn^*$ i załóżmy niewprost, że $X \notin Nzl$. W takim razie na mocy $D3^T$ istnieje takie $x_1$, że

$$x_1 \in X, \tag{1}$$

$$x_1 \in Cn(X \setminus \{x_1\}). \tag{2}$$

Ze wzoru (2) i $A2^T$, $A3^T$ otrzymujemy

$$\{x_1\} \cup P\{x_1\} \subset Cn(X \setminus \{x_1\} \cup P\{x_1\}). \tag{3}$$

Ponieważ na mocy założenia, (1) i D5 $x_1 \in Gn$, zatem wobec L24

$$\{x_1\} \cup P\{x_1\} \notin Nsp. \tag{4}$$

Ze wzorów (3), (4), definicji $D1^T$ i $A2^T$-$A4^T$ wynika, że

$$X \setminus \{x_1\} \cup P\{x_1\} \notin Nsp. \tag{5}$$

Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem $X \setminus \{x_1\} \cup P\{x_1\} \in Nsp$ otrzymanym na podstawie założenia, wzoru (1) i twierdzenia T30a, co kończy dowód.

Twierdzenie T32b wynika z T32a i $T10^T$c.

Bazy generalizacji posiadają ponadto następujące własności:

T33. $X \in Gn^* \wedge Y,Z \subset X \wedge (Y \approx Z \vee Y \approx^{-1} Z) \Longrightarrow Y = Z.$

Równoważne lub równoważne ze względu na odrzucanie podzbiory dowolnej bazy generalizacji są identyczne.
Twierdzenie T33 wynika z T32a,b $T3^T$a i $T10^T$a.

T34. $X \in Gn^* \wedge \overline{\overline{X}} = \aleph_0 \Longrightarrow X \notin Aks \cup Aks^{-1}.$

Widzimy więc, że przeliczalne bazy generalizacji nie są ani zbiorami aksjomatyzowalnymi ani też zbiorami aksjomatyzowalnymi ze względu na odrzucanie.
Twierdzenie powyższe wynika z T32a,b $T3^{T}b$ i $T10^{T}b$.

T35. $X \in Gn^{*} \wedge Y \subsetneq X \Longrightarrow Y \notin Zp\text{ł}$.

Twierdzenie to otrzymujemy na podstawie T25, T33 i $T2^{T}b$.
Z twierdzeń T35 i $T2^{T}a$ wynika, że każdy podzbiór właściwy dowolnej bazy generalizacji ma tę własność, iż pewne zdania oraz ich negacje nie dają się udowodnić na podstawie zdań należących do tego podzbioru.

T36. $Gn^{*} \cap Syst = \Phi$.

Żadna więc baza generalizacji nie jest systemem.
Twierdzenie powyższe wynika z T32a i $T3^{T}c$.

## § 4. O wnioskowaniu indukcyjnym.

Niech k będzie dowolną lecz ustaloną liczbą naturalną różną od zera. Przyjmujemy następującą definicję:

D9. $x \in Ind\, X \Longleftrightarrow \bigvee_{Y} (x \in Gn\, Y \wedge \overline{\overline{X \cap Y}} \geqslant k)$.

Zbiór Ind X nazywamy zbiorem wszystkich wniosków indukcyjnych otrzymanych na podstawie zdań zbioru X.

Sens intuicyjny definicji D9 wymaga szczegółowych wyjaśnień. Niech y będzie dowolnym zdaniem empirycznym należącym do zbioru X. Jeśli w tym zbiorze istnieje co najmniej k zdań podobnych do zdania $y$, to elementem zbioru Ind $X$ jest zdanie generalizujące klasę $[y]_0$. **Odwrotnie: jeśli $x \in$ Ind $X$, to istnieje taki zbiór $Y$, że** zdanie $x$ generalizuje ten zbiór i zbiory $X$ i $Y$ posiadają co najmniej $k$ wspólnych elementów. Mówiąc więc swobodnie zdanie $x$ jest wnioskiem indukcyjnym uzyskanym na podstawie $k$ zdań podobnych należących do zbioru $X$.

Warto zaznaczyć, że zasadnicze własności zbioru Ind $X$ nie należą od tego, jak wielka jest liczba $k$.

D10. $Cn^I X = X \cup$ Ind $X$.

Elementami zbioru $Cn^I X$ są więc wszystkie zdania zbioru $X$ oraz wszystkie wnioski indukcyjne otrzymane na podstawie zdań zbioru $X$.

W dalszych rozważaniach posłużymy się pojęciem konsekwencji (zob. np. [2, 13, 16, 17]).

Konsekwencją finitystyczną nazywamy dowolną funkcję $f$ określoną i przyjmującą wartości w zbiorze $2^S$ ($S$ jest tak jak poprzednio zbiorem wszystkich zdań dowolnego lecz ustalonego języka) i spełniającą wyrażenia, które otrzymujemy z aksjomatów $A2^T$–$A5^T$ ogólnej teorii systemów dedukcyjnych Tarskiego przez zastąpienie symbolu Cn symbolem $f$ (por. [16, 17]).

Wykażemy przede wszystkim, że funkcja $Cn^I$ jest konsekwencją finitystyczną. Do tego celu potrzebne będą następujące lematy:

L25. Ind $X \subset$ Gn.

Lemat ten jest bezpośrednim wnioskiem z definicji D9 i D3.

L26. Ind $Cn^I X \subset$ Ind $X$.

D o w ó d. Niech $x \in$ Ind $Cn^I X$. W takim razie wobec D9 istnieje taki zbiór $Y_1$, że

$$x \in Cn\, Y_1, \tag{1}$$

$$\overline{\overline{Cn^I X \cap Y_1}} \geqslant k. \tag{2}$$

Ze wzoru (1), T5a i $D16^T$ wynika, że $Y_1 \subset Emp$, skąd na mocy L25 i T9 otrzymujemy

$$Ind\, X \cap Y_1 = \emptyset. \tag{3}$$

Ponieważ z definicji D10 i ze wzoru (2) wynika, że

$$\overline{\overline{(X \cap Y_1) \cup (Ind\, X \cap Y_1)}} \geqslant k, \tag{4}$$

zatem wobec (3),

$$\overline{\overline{X \cap Y_1}} \geqslant k. \tag{5}$$

Na podstawie wzorów (1), (5) i definicji D9 otrzymujemy $x \in Ind\, X$, co kończy dowód.

L27a. $X,\ Ind\, X \subset Cn^I X \subset S,$

b. $Cn^I Cn^I X \subset Cn^I X.$

Lemat L27a jest bezpośrednim wnioskiem z D10 i D9, lemat L27b wynika z D10 i L26.

L28. $X \subset Y \Longrightarrow Cn^I X \subset Cn^I Y.$

Lemat ten dowodzi się łatwo w oparciu o D9 i D10.

L29. $x \in Cn^I X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge x \in Cn^I Y).$

D o w ó d. Niech $x \in Cn^{I}X$. W takim razie wobec D10 $x \in X$ lub $x \in \mathrm{Ind}\ X$. Lemat jest oczywisty w przypadku, gdy $x \in X$. Załóżmy więc, że

$$x \in \mathrm{Ind}\ X. \tag{1}$$

Wtedy wobec D9 istnieje takie $Y_1$, że

$$x \in \mathrm{Gn}\ Y_1, \tag{2}$$

$$\overline{\overline{X \cap Y_1}} \geqslant k. \tag{3}$$

Wobec wzoru (3) istnieje więc taki zbiór $Z_1$, że

$$Z_1 \subset X \quad \text{i} \quad \overline{\overline{Z}}_1 < \aleph_0, \tag{4}$$

$$\overline{\overline{Z_1 \cap Y_1}} \geqslant k. \tag{5}$$

Uwzględniając wzory (2), (5) i definicję D9 otrzymujemy $x \in \mathrm{Ind}\ Z_1$, skąd na mocy D10

$$x \in Cn^{I}Z_1. \tag{6}$$

W rozważanym przypadku teza lematu wynika ze wzorów (4) i (6), co kończy dowód.
Na podstawie lematów I27a, b, I28 i I29 otrzymujemy następujące metatwierdzenie:

TI. Funkcja $Cn^{I}$ jest konsekwencją definitystyczną.

Na konsekwencjach można wykonywać działania, które nazywać będziemy dodawaniem i mnożeniem i odpowiednio oznaczać symbolami $\oplus$ i $\odot$.

Oznaczmy symbolem $\Omega$ zbiór wszystkich konsekwencji finitystycznych w zbiorze S i załóżmy, że $f, g, h \in \Omega$.
Przyjmujemy następującą definicję indukcyjną:

DIa. $\varphi^{0} < f, g > (X) = f(g(X))$,

b. $\varphi^{k+1} < f, g > (X) = \varphi^{0} < f, g > (\varphi^{k} < f, g > (X))$.

Działania dodawania i mnożenia konsekwencji definiujemy w następujący sposób:

DII. $h = f \oplus g \Longleftrightarrow \bigwedge_{X} \left[ h(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^{i} < f, g > (X) \right]$.

DIII. $h = f \odot g \Longleftrightarrow \bigwedge_{X} \left[ h(X) = f(X) \cap g(X) \right]$.

Można udowodnić, że zbiór $\Omega$ posiada następujące własności[6]:

a. jest zamknięty względem działań $\oplus$ i $\odot$,

b. jest strukturą z zerem i jednością,

c. nie jest strukturą modularną.

Dla działań $\oplus$ i $\odot$ zachodzą więc prawa przemienności, łączności, idempotentności i pochłaniania.
Zerem i jednością struktury $\Omega$ są odpowiednio funkcje $e_0$ i $e_1$ zdefiniowane w następujący sposób:

DIVa. $f = e_0 \Longleftrightarrow \bigwedge_{X} \left[ f(X) = X \right]$.

---

[6] Własności te podane zostały w nieopublikowanej pracy J. Słupeckiego i G. Brylla "Nota o własnościach pewnych działań na konsekwencjach".

b. $f = e_1 \Longleftrightarrow \bigwedge_X [f(X) = S]$.

Wprowadzając w zbiorze $\Omega$ relację porządku $\leqslant$ następującą definicją:

DV. $f \leqslant g \Longleftrightarrow f \oplus g = g$,

można wykazać, że

TII. $f \leqslant g \Longleftrightarrow \bigwedge_X (f(X) \subset g(X))$.

Łatwo wykazać również, że

TIIIa. $\bigwedge_X [h(X) \subset f(X) \wedge h(X) \subset g(X)] \Longleftrightarrow h \leqslant f \odot g$,

b. $\bigwedge_X [f(X) \subset h(X) \wedge g(X) \subset h(X)] \Longleftrightarrow f \oplus g \leqslant h$.

TIV. $f((f \oplus g)(X)) = g((f \oplus g)(X)) = (f \oplus g)(X)$.

Omówimy tutaj dokładniej własności funkcji $Cn \oplus Cn^I$ i $Cn \odot Cn^I$, gdzie $Cn$ jest funkcją wyprowadzalności scharakteryzowaną przez aksjomaty $A2^T$-$A8^T$, zaś $Cn^I$ - funkcją określoną definicją D10. Z własności funkcji $Cn$ i $Cn^I$ oraz własności zbioru $\Omega$ wynika, że rozważane funkcje są konsekwencjami finitystycznymi.

Na podstawie DIII, D10 i $A2^T$ otrzymujemy:

T37. $(Cn \odot Cn^I)(X) = X \cup Cn\, X \cap Ind\, X$.

Do zbioru $(Cn \odot Cn^I)(X)$ należą więc wszystkie zdania zbioru X oraz w każdy wniosek indukcyjny otrzymany na podstawie zdań zbioru X i posiadający dowód na gruncie zdań tego zbioru.

W dalszym ciągu skorzystamy z następujących lematów:

L30. $X \subset Gn \Longrightarrow Ind\ X = \Phi$.

D o w ó d. Niech $X \subset Gn$ i załóżmy niewprost, że $Ind\ X \neq \Phi$. Istnieje więc takie $x_1$, że $x_1 \in Ind\ X$. Stąd na mocy D9 istnieje takie $Y_1$, że

$$x_1 \in Gn\ Y_1, \tag{1}$$

$$\overline{\overline{Y_1 \cap X}} \geqslant k. \tag{2}$$

Ze wzoru (1), T5a i $D16^T$ wynika, że $Y_1 \subset Emp$, skąd wobec założenia i T9 $Y_1 \cap X = \Phi$. Ostatni wzór jest sprzeczny ze wzorem (2), co kończy dowód niewprost.

L31. $x \in Emp \Longrightarrow Cn[x]_o \cap Ind[x]_o = \Phi$.

Lemat ten wynika z T10 i L25.

T38a. $X = [x]_o \vee X \subset Gn \Longrightarrow Cn\ X \cap Ind\ X = \Phi$,

b. $X = [x]_o \vee X \subset Gn \Longrightarrow (Cn \odot Cn^I)(X) = X$.

Widzimy więc, że zbiór zdań, które można udowodnić i jednocześnie otrzymać jako wnioski indukcyjne na podstawie dowolnej klasy zdań podobnych lub na podstawie dowolnego podzbioru zbioru generalizacji, jest zbiorem pustym. Jeśli więc zbiór $X$ jest pewną klasą zdań podobnych lub podzbiorem zbioru generalizacji, wówczas przy pomocy konsekwencji $Cn \odot Cn^I$ nie możemy wyprowadzić żadnego zdania, które nie należy do zbioru $X$.

Twierdzenie T38a wynika z L30, L31 i A1, twierdzenie T38b otrzymujemy na podstawie T38a i T37.

Weźmy pod uwagę dowolną konsekwencję finitystyczną f spełniającą warunek:

$$(\alpha) \quad \bigwedge_{X} (f(X) \subset Cn\, X \wedge f(X) \subset Cn^{I} X).$$

Na podstawie TIIIa stwierdzamy wtedy, że $f \leqslant Cn \odot Cn^{I}$. Funkcja $Cn \odot Cn^{I}$ jest więc "najsilniejszą"(maksymalną) konsekwencją spośród wszystkich konsekwencji finitystycznych f spełniających warunek ($\alpha$).

Weźmy z kolei pod uwagę funkcję $Cn \oplus Cn^{I}$. W myśl definicji DIII otrzymujemy:

$$(Cn \oplus Cn^{I})(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^{i} < Cn, Cn^{I} > (X).$$

Do zbioru $(Cn \oplus Cn^{I})(X)$ należy więc dowolne zdanie, które można otrzymać w skończonej ilości kroków na podstawie zdań zbioru X przez stosowanie na przemian funkcji Cn i $Cn^{I}$ (tj. przez stosowanie na przemian wnioskowania dedukcyjnego i wnioskowania indukcyjnego). Rozważany zbiór jest domknięty (jest systemem) ze względu na dowolną z funkcji Cn, $Cn^{I}$ i $Cn \oplus Cn^{I}$. Tak więc zdaniami, które można otrzymać na podstawie zbioru $(Cn \oplus Cn^{I})(X)$ drogą wnioskowania dedukcyjnego lub wnioskowania indukcyjnego są te i tylko te zdania, które należą do tego zbioru.

Weźmy dowolną konsekwencję finitystyczną f spełniającą warunek:

$$(\beta) \quad \bigwedge_{X} (Cn\, X \subset f(X) \wedge Cn^{I} X \subset f(X)).$$

a podstawie twierdzenia TIIIb stwierdzamy wtedy, że $Cn \oplus Cn^{I} \leqslant f$. unkcja $Cn \oplus Cn^{I}$ jest więc "najsłabszą" (minimalną) spośród szystkich konsekwencji finitystycznych $f$ spełniających waruek ($\beta$).

## § 5. Dowód niesprzeczności teorii $T^{G}$.

W dowodzie niesprzeczności teorii $T^{G}$ posłużymy się interpretacją arytmetyczną, modyfikując w pewien sposób matrycę Wajsberga adekwatną dla systemu S5 Lewisa[7].

Przed podaniem słownika interpretacyjnego wprowadzimy kilka definicji pomocniczych[8].

---

[7] Podajemy tutaj taką interpretację, w której oprócz aksjomatów teorii $T^{G}$ spełnione jest wyrażenie:

$$\overline{\overline{Emp^{+}}} = \aleph_0 . \tag{1}$$

Jeżeli pominiemy warunek (1), wówczas dowód niesprzeczności systemu $T^{G}$ daje się w sposób istotny uprościć. Wystarczy w tym celu interpretować Cn jako standardową funkcję wyprowadzalności, zbiór $Emp^{+}$ jako zbiór pusty, zaś relację o jako dowolną relację sprzeczną. Wynik ten zakomunikował mi Doc. dr W.A. Pogorzelski.
Wyrażenia (1) nie dołączyliśmy do aksjomatów konstruowanej teorii, gdyż nie korzysta się z niego w dowodach twierdzeń, które odgrywają istotną rolę w teorii, jest ono jednak całkowicie intuicyjne. Zauważmy, że w teorii $T^{G}$ daje się udowodnić twierdzenie:

$$Emp^{+} \neq \Phi \Longrightarrow \overline{\overline{Emp^{+}}} = \aleph_0 .$$

[8] Wszystkie definicje i twierdzenia podane w tym paragrafie zaopatrujemy symbolem *.

D1*. $S^o$ jest zbiorem wszystkich takich ciągów okresowych zer i jedynek, w których wyraz trzeci jest początkiem okresu.

Dowolne elementy zbioru $S^o$ oznaczamy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Przyjmujemy też, że

$$\alpha_k = (a_k^1, a_k^2, \ldots).$$

Odpowiednikami negacji i implikacji w matrycy Wajsberga są funkcje $n^o$ i $c^o$ zdefiniowane w następujący sposób:

D2*a. $\alpha_l = n^o \alpha_k \Longleftrightarrow \bigwedge_j (a_l^j = 0 \Longleftrightarrow a_k^j = 1),$

b. $\alpha_m = c^o \alpha_k \alpha_l \Longleftrightarrow \bigwedge_j (a_m^j = 0 \Longleftrightarrow a_k^j = 1 \wedge a_l^j = 0).$

Zgodnie z powyższą definicją mamy na przykład:

$$n^o(00\ 101\ 101\ \ldots) = (11\ 010\ 010\ \ldots),$$

$$c^o(11\ 001\ 001\ \ldots)(01\ 10\ 10\ \ldots) = (01\ 111110\ 111110\ \ldots).$$

Wśród podzbiorów zbioru $S^o$ wyróżnimy zbiory A, B i C przyjmując następującą definicję:

D3*a. $\alpha_k \in A \Longleftrightarrow a_k^1 = 0 \wedge a_k^2 = 1 \wedge ((a_k^3 = 0 \wedge a_k^4 = 1 \wedge$ 2 jest dł. okr.$) \vee \bigvee_{l>1} (\bigwedge_{2<j\leqslant 2^{l-1}+1} a_k^j = 1 \wedge$

$\bigwedge_{2^{l-1}+1<j\leqslant 2^l+1} a_k^j = 0 \wedge a_k^{2^l+2} = 1 \wedge 2^l$ jest długością okresu$)),$

b. $\alpha_k \in B \Leftrightarrow n^o\ \alpha_k \in A$,

c. $\alpha_k \in C \Leftrightarrow (a_k^2 = 1 \wedge \bigwedge_{j \neq 2} a_k^j = 0) \vee (a_k^1 = 1 \wedge \bigwedge_{j > 1} a_k^j = 0)$.

Na podstawie powyższej definicji i $D2^*a$ mamy:

$$A = \{(01\ 01\ 01\ \ldots), (01\ 1001\ 1001\ \ldots), (01\ 11100001\ 11100001\ldots), (01\ 1111111000000001\ 1111111000000001\ \ldots), \ldots\};$$

$$B = \{(10\ 10\ 10\ \ldots), (10\ 0110\ 0110\ \ldots), (10\ 00011110\ 00011110\ldots), (10\ 0000000111111110\ 0000000111111110\ \ldots), \ldots\};$$

$$C = \{(01\ 0\ 0\ \ldots.), (10\ 0\ 0\ \ldots)\}.$$

Niech zmienne $X^o$, $Y^o$, $Z^o$, ... przebiegają zbiór $2^{S^o}$. Na rodzinie podzbiorów zbioru $S^o$ określamy funkcję $Cn^o$. przyjmując następującą definicję:

$$D4^*.\quad \alpha_k \in Cn^o X^o \Leftrightarrow \bigvee_{Y^o \subset X^o} (\overline{\overline{Y^o}} < \aleph_0 \wedge \bigwedge_j (a_k^j = 1 \vee \bigvee_{\alpha_l \in Y^o} a_l^j = 0)).$$

Przejdźmy teraz do interpretacji terminów występujących w aksjomatach teorii $T^G$.

Zbiór $S$ definiujemy w następujący sposób:

$$D5^*.\quad \langle i, \alpha_j \rangle \in S \Leftrightarrow (i = 1 \wedge \alpha_j \in S^o \setminus (A \cup B)) \vee$$
$$\vee \bigvee_{n > 0} ((i = 2n \wedge \alpha_j \in A) \vee (i = 2n+1 \wedge \alpha_j \in B)).$$

Dowolne elementy zbioru $S$ oznaczamy

$$\alpha_{ij}, \quad \text{gdzie} \quad i,j = 1, 2, \ldots$$

Przyjmujemy też, że

$$\alpha_{ij} = \langle i, \alpha_j \rangle .$$

Łatwo zauważyć, że (zob. A1$^T$):

T1*. $\overline{\overline{S}} = \aleph_0 .$

Funktory n i c definiujemy następująco:

$$\text{D6}^*\text{a. } n\,\alpha_{ij} = \begin{cases} \langle 1, n^o \alpha_j \rangle, & \text{gdy } i = 1, \\ \langle i+1, n^o \alpha_j \rangle, & \text{gdy } i > 1. \end{cases}$$

$$\text{b. } c\,\alpha_{ij}\,\alpha_{kl} = \begin{cases} \langle 1, c^o \alpha_j \alpha_l \rangle, & \text{gdy } c^o \alpha_j \alpha_l \in S^o \setminus (A \cup B), \\ \langle 4, c^o \alpha_j \alpha_l \rangle, & \text{gdy } c^o \alpha_j \alpha_l \in A, \\ \langle 5, c^o \alpha_j \alpha_l \rangle, & \text{gdy } c^o \alpha_j \alpha_l \in B. \end{cases}$$

Na podstawie definicji D5* i D6*a,b otrzymujemy (zob. A9$^T$, A10$^T$):

T2*a. $\alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in S \Longrightarrow n\,\alpha_{ij}, \; c\,\alpha_{ij}\,\alpha_{kl} \in S,$

b. $n\,\alpha_{ij} = n\,\alpha_{kl} \Longrightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{kl}.$

Niech zmienne X, Y, Z, ... przebiegają zbiór $2^S$. Pomiędzy elementami zbiorów $2^S$ i $2^{S^o}$ ustalamy następujące przyporządkowanie.

D7*. $\alpha_j \in X^o \Longleftrightarrow \bigvee_i \langle i, \alpha_j \rangle \in X.$

Funkcję Cn definiujemy następująco:

$$D8^*. \quad \alpha_{ij} \in Cn\, X \Longleftrightarrow \Big[ i = 1 \wedge \alpha_j \in Cn^o X^o \cap (S^o \setminus (A \cup B)) \vee$$
$$\vee \bigvee_{n>0} ((i = 2n \wedge \alpha_j \in Cn^o X^o \cap A) \vee (i=2n+1 \wedge \alpha_j \in Cn^o X^o \cap B))\Big]$$

Z definicji $D8^*$ i $D4^*$ wynika, że

$$L1^*. \quad Cn\,\Phi = \{< 1, (11\ 1\ 1 \ldots) >\} \ .$$

Zauważmy już teraz, że prawdziwe jest twierdzenie (zob. $A2^T$ - $A8^T$):

$T3^*$a. $X \subset Cn\, X \subset S$,

b. $X \subset Y \Longrightarrow Cn\, X \subset Cn\, Y$,

c. $Cn\, Cn\, X \subset Cn\, X$,

d. $\alpha_{ij} \in Cn\, X \Longrightarrow \bigvee_{Y \subset X} (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge \alpha_{ij} \in Cn\, Y)$,

e. $c\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kl} \in Cn\, X \Longleftrightarrow \alpha_{kl} \in Cn(X \cup \{\alpha_{ij}\})$,

f. $Cn\, \{\alpha_{ij}\} \cap Cn\{n\, \alpha_{ij}\} = Cn\, \Phi$,

g. $Cn\{\alpha_{ij}, n\, \alpha_{ij}\} = S$.

Dowód powyższego twierdzenia nie nastręcza większych trudności, wymaga jednak dłuższych i mało interesujących przekształceń rachunkowych.

Przyjmujemy następujące definicje terminów $\neg$ i N:

$$\text{D9}^*. \quad \neg\alpha_{ij} = \begin{cases} n\,\alpha_{ij}, & \text{gdy } i = 1 \text{ lub } i = 2, \\ < i-1,\ n^{\circ}\alpha_j >, & \text{gdy } i \geqslant 3. \end{cases}$$

$$\text{D10}^*. \quad \alpha_{ij} \in NX \Longleftrightarrow \neg\alpha_{ij} \in X.$$

Na podstawie definicji D9$^*$ i D6$^*$a otrzymujemy (zob. D14$^T$):

$$\text{T4}^*. \quad \alpha_{kl} = \neg\alpha_{ij} \Longleftrightarrow \bigwedge_{\alpha_{mn}} (\alpha_{ij} \neq n\alpha_{mn} \wedge \alpha_{kl} = n\alpha_{ij}) \vee \alpha_{ij} = n\alpha_{kl}.$$

Zbiory Emp$^+$ i Emp definiujemy następująco:

$$\text{D11}^*\text{a}. \quad \alpha_{ij} \in Emp^+ \Longleftrightarrow i = 2 \wedge \alpha_j \in A,$$

$$\text{b}. \quad Emp = Emp^+ \cup NEmp^+.$$

Bezpośrednim wnioskiem z definicji D11$^*$a i D6$^*$a jest twierdzenie (zob. A11$^T$):

$$\text{T5}^*. \quad n\,\alpha_{ij} \notin Emp^+.$$

Łatwo sprawdzić również, że

$$\text{I2}^*. \quad \alpha_{ij} \in NEmp^+ \Longleftrightarrow i = 3 \wedge \alpha_j \in B.$$

Relację o definiujemy następująco:

$$\text{D12}^*. \quad \alpha_{ij} \circ \alpha_{kl} \Longleftrightarrow \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in Emp^+ \vee \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in NEmp^+.$$

Na podstawie D12*, D11*a,b, L2* i D6*a otrzymujemy (zob. A1-A4):

$$T6^*a.\quad \alpha_{ij} \circ \alpha_{kl} \Longrightarrow \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in Emp^+ \vee \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in NEmp^+,$$

$$b.\quad \alpha_{ij} \circ \alpha_{kl} \wedge \alpha_{ij} \in Emp^+ \Longrightarrow n\alpha_{ij} \circ n\alpha_{kl},$$

$$c.\quad n\alpha_{ij} \circ n\alpha_{kl} \Longrightarrow \alpha_{ij} \circ \alpha_{kl},$$

$$d.\quad \alpha_{ij}, \alpha_{kl}, \alpha_{mn} \in Emp \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha_{ij} \circ \alpha_{ij} \wedge (\alpha_{ij} \circ \alpha_{mn} \wedge \alpha_{kl} \circ \alpha_{mn} \Longrightarrow \alpha_{kl} \circ \alpha_{ij}).$$

Z twierdzenia T6*d wynika, że w zbiorze Emp relacja o jest relacją typu równoważności; można więc tworzyć klasy abstrakcji wyznaczone przez tę relację.

Zbiory Gn X i Gn definiujemy w następujący sposób (zob. D1 i D3):

$$D13^*a.\quad \alpha_{ij} \in Gn\,X \Longleftrightarrow \bigvee_{\alpha_{mn}} (X = [\alpha_{mn}]_o) \wedge Cn\,X \subsetneq Cn\{\alpha_{ij}\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\alpha_{kl}} (X \subset Cn\{\alpha_{kl}\} \Longrightarrow \alpha_{ij} \in Cn\{\alpha_{kl}\}).$$

$$b.\quad \alpha_{ij} \in Gn \Longleftrightarrow \bigvee_{X} \alpha_{ij} \in Gn\,X.$$

Zauważmy tutaj, że zbiór Gn posiada następującą własność:

$$L3^*.\quad \alpha_{ij} \in Gn \Longleftrightarrow i = 1 \wedge \alpha_j \in C.$$

Na podstawie D13*a, D11*a,b, L2* i D8* otrzymujemy (zob. A5 i A6):

T7*a. $\alpha_{ij} \in \mathrm{Emp} \Longrightarrow \bigvee_{\alpha_{kl}} \alpha_{kl} \in \mathrm{Gn}\left[\alpha_{ij}\right]_o$,

b. $\alpha_{ij} \in \mathrm{Gn}\ X \Longrightarrow \mathrm{Cn}\{\alpha_{ij}\} \cap \mathrm{Emp} \subset X$.

Przyjmujemy w końcu następujące definicje (zob. D1$^T$, D2, D17$^T$):

D14*. $X \in \mathrm{Nsp} \Longleftrightarrow \mathrm{Cn}\ X \neq S$,

D15*. $\alpha_{ij} \in \mathrm{D}X \Longleftrightarrow \alpha_{ij} \in \mathrm{Cn}\ X \vee \bigvee_{Y \subset \mathrm{Cn}\ X} \alpha_{ij} \in \mathrm{Gn}\ Y$,

D16*. $X \in \mathrm{Emp}^* \Longleftrightarrow X \subset \mathrm{Emp} \wedge \sim \bigvee_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij}, \mathrm{n}\alpha_{ij} \in X$.

Można wtedy udowodnić, że (zob. A7):

T8*. $X \in \mathrm{Emp}^* \Longrightarrow \mathrm{D}X \in \mathrm{Nsp}$.

Dowód tego twierdzenia również nie nastręcza większych trudności. Zauważmy tylko, że w dowodzie wykorzystuje się w sposób istotny własność finitystyczności funkcji Cn (zob. T3*d).

W ten sposób skonstruowaliśmy model dla teorii $T^G_*$ i tym samym wykazaliśmy jej niesprzeczność.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bryll - Kilka uzupełnień teorii zdań odrzuconych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu, Seria B: Monografie, Nr 22 (1968), s. 133-154.

[2] J. Łoś, R. Suszko - Remarks on sentential logics.Indagationes Mathematicae, 20 (1958), pp. 177-183.

[3] J. Łukasiewicz - O sylogistyce Arystotelesa.Sprawozdania Polskiej Akademii Umiejętności, 44, Nr 6, Kraków (1939), s. 220-227.

[4] J. Łukasiewicz - Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic. Oxford 1951.

[5] J. Łukasiewicz - Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane. Warszawa 1961.

[6] J. Łukasiewicz - A System of Modal Logic. The Journal of Computing Systems, vol. 1, no. 3 (1953), pp. 111-149.

[7] W.A. Pogorzelski - Adekwatność teorii systemów dedukcyjnych względem rachunków zdaniowych. Studia Logica, tom XIII (1962), s. 103-131.

[8] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach. Studia Logica. Cz. I: tom IX (1960), s. 163-176; Cz. II: tom X (1960), s. 77-95.

[9] W.A. Pogorzelski, J. Słupecki - O dowodzie matematycznym.Warszawa 1962.

[10] J. Słupecki - Z badań nad sylogistyką Arystotelesa. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, Nr 6 (1948).

[11] J. Słupecki - Funkcja Łukasiewicza. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego, Matematyka-Fizyka-Astronomia-II, Seria B, Nr 3 (1959), s. 33-40.

[12] J. Słupecki, W.A. Pogorzelski - A variant of the proof of the completeness of the first order functional calculus. Studia Logica, tom XII (1961), pp. 125-134.

[13] R. Suszko - Concerning the method of logical schemes, the notion of logical calculus and the role of consequence relations. Studia Logica, tom XI (1961), s. 185-214.

[14] A. Tarski - Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII Band, Leipzig (1930), pp. 361-404.

[15] A. Tarski - Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, vol. 23 (1930), pp. 22--29.

[16] A. Tarski - Logic, Semantics, Metamathematics.(Zbiór artykułów). Oxford 1956.

[17] R. Wójcicki - O zasięgach niektórych teorii konsekwencji.Acta Universitatis Wratislaviensis, No 21 (1964), s. 147-158.

[18] U. Wybraniec-Skardowska - Teoria zdań odrzuconych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu. Seria B: Monografie, Nr 22 (1968), s. 5-132.

Praca wpłynęła dnia 15 maja 1967 r.

## LOGICAL RELATIONS BETWEEN SENTENCES OF EMPIRICAL SCIENCES

### S u m m a r y

This paper is an attempt of formalization of these problems of metodology of the empirical sciences which concern to such concepts as: empirical sentence, similar sentences, generalisation, inductive conclusion etc.

The axiomatic system which is given in this paper is an extension of U. Wybraniec-Skardowska's theory of rejected sentences. It is obtained by enriching the language and set of axioms of that theory.

Some fundamental properties of similar sentences, generalisations, opositte generalisations and the bases of generalisations have been investigated.

The concept of inductive conclusion from a set of sentences has been introducet in the section which deals with inductive inferences. Some properties of consequence-functions which are connected with that concept has been discussed.

In the concluding section of this paper a proof of consistency of consider theory is given.

## ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРЕДЛОЖЕНИЯМИ ЭМПИРИЧЕСКИХ НАУК


### Резюме

В работе делается попытка формализировать вопросы методологии емпирических наук связанные с такими понятиями, как эмпирическое предложение, подобные предложения, генерализация, индуктивное заключение итд.

Приведенная в работе аксиоматическая система является расширением построенной У. Выбранец-Скардовской теории отбрасывания предложений и становит обогащение системы аксиом и языка этой теории.

Между прочим подвергнулись исследованиям основные свойства подобных предложений, генерализаций, противных генерализаций а также базисов генерализаций.

В параграфе посвященном индуктивным умозаключениям вводится понятие индуктивного заключения из некоторого множества предложений а также формулируется свойства некоторых связанных с этим понятием функций консеквенций.

В последней части работы проводится доказательство непротиворечивости рассматриваемой теории.

## Spis treści

St